evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Moderní technologie ve studiu aplikované fyziky
CZ.1.07/2.2.00/07.0018

6. Posloupnosti a jejich limity, řady

Posloupnost je speciální, důležitý příklad funkce. Při praktickém měření hodnot určité fyzikální veličiny dostáváme v podstatě „posloupnost“ naměřených hodnot. Jak uvidíme vzápětí, jde o konečnou podmnožinu matematicky definované posloupnosti. V této kapitole také poprvé zavedeme pojmy jako limita, omezenost, konvergence, což jsou základní pojmy matematické analýzy.

POSLOUPNOSTI

Funkce, jejímž definičním oborem je množina přirozených čísel **N**, se nazývá *posloupnost*. Funkční hodnoty posloupnosti se nazývají *členy posloupnosti*, funkční hodnota posloupnosti v bodě $n \in \mathbf{N}$ se nazývá *n-tý člen posloupnosti*.

Funkční předpis posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ (resp. a_n) je zpravidla zadán jedním z následujících způsobů:

- *Vzorcem pro n-tý člen a_n (tzv. explicitní definice)*; např. $a_n = 2n$ (posloupnost všech sudých přirozených čísel), $a_n = 2n - 1$ (posloupnost všech lichých přirozených čísel).
- *Rekurentně*, tj. zadáním prvního nebo několika prvních členů posloupnosti a předpisem (vzorcem), podle něhož lze postupně určit další členy posloupnosti; např. $a_1 = 4$, $a_{n+1} = a_n - 1$; nebo $b_1 = 1$, $b_2 = 5$, $b_{n+1} = b_n - b_{n-1} + 1$.

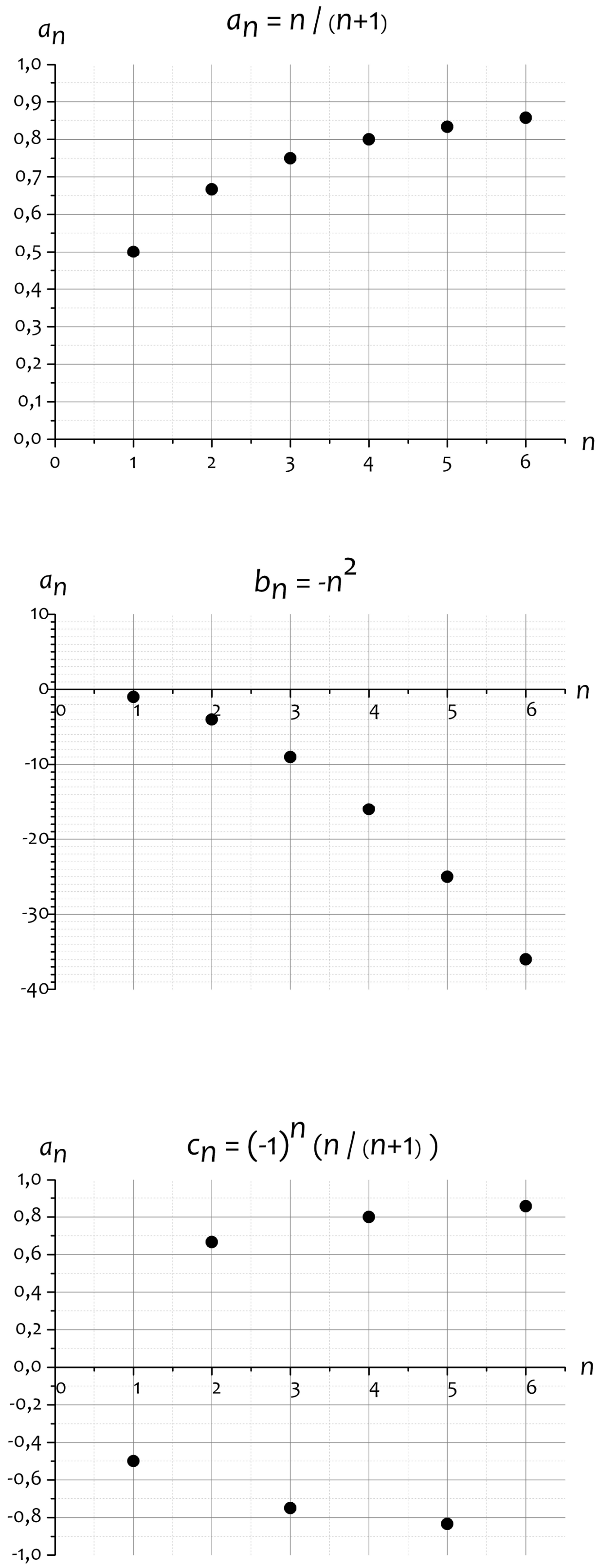
Posloupnosti můžeme graficky znázorňovat nejen v rovině (v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic), ale i přímo na číselné ose. *Grafem posloupnosti* je vždy množina navzájem izolovaných bodů.

Příklad:

Znázorněte graficky prvních šest členů posloupností, daných vzorcem pro *n*-tý člen.

$a_n = \dfrac{n}{n+1}$; $b_n = -n^2$; $c_n = (-1)^n \dfrac{n}{n+1}$.

Řešení:



Obrázek 6.1 Grafické znázornění prvních šesti členů posloupností:

$$a_n = \frac{n}{n+1},\ b_n = -n^2,\ c_n = (-1)^n \frac{n}{n+1}$$

NĚKTERÉ VLASTNOSTI POSLOUPNOSTÍ

Jelikož posloupnost s reálnými členy je zvláštním případem reálné funkce reálné proměnné, můžeme u ní také zkoumat obdobné vlastnosti:

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá:

- *shora omezená*, jestliže existuje takové $h \in \mathbf{R}$, že platí $a_n \leq h$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$.
- *zdola omezená*, jestliže existuje takové $d \in \mathbf{R}$, že platí $a_n \geq h$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$.
- *omezená*, je-li omezená shora i zdola.
- *rostoucí*, je-li $a_n < a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$.
- *klesající*, je-li $a_n > a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$.
- *neklesající*, je-li $a_n \leq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$.
- *nerostoucí*, je-li $a_n \geq a_{n+1}$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$.

Posloupnosti rostoucí, klesající, neklesající, nerostoucí nazýváme souhrnně *monotónní posloupnosti*. V případě posloupností rostoucích a klesajících jde potom o *ryze monotónní posloupnosti*.

ELEMENTÁRNÍ TYPY POSLOUPNOSTÍ

Aritmetickou posloupností rozumíme posloupnost typu

$$a_n = a + (n-1)d \, , \tag{6.1}$$

kde a, d jsou libovolná pevně zvolená reálná čísla a $n = 1, 2, 3, \ldots$ ($n \in \mathbf{N}$). Číslo d se nazývá *diference aritmetické posloupnosti*, číslo a je první člen této posloupnosti.

Aritmetická posloupnost tedy vypadá takto:

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ a+4d, \ldots$$

a platí, že každý člen aritmetické posloupnosti lze získat přičtením konstanty d k předchozímu členu. Například $a_5 = a + 4d = (a + 3d) + d = a_4 + d$.

Rekurentní definice aritmetické posloupnosti je pak následující:

1. $a_1 = a$,
2. $a_{n+1} = a_n + d$, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Lze konstatovat, že daná posloupnost je aritmetická právě tehdy, je-li rozdíl mezi dvěma následujícími členy stále stejný.

Pro součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti platí vzorec:

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n). \tag{6.2}$$

Geometrickou posloupností rozumíme posloupnost typu

$$a_n = aq^{n-1}, \tag{6.3}$$

kde a, q jsou pevně zvolená reálná čísla a $n = 1, 2, 3,\ldots$ ($n \in \mathbf{N}$). Číslo q se nazývá *kvocient geometrické posloupnosti*, číslo a je první člen této posloupnosti.

Geometrická posloupnost tedy vypadá takto:

$$a, aq, aq^2, aq^3, aq^4, \ldots$$

a platí, že každý člen geometrické posloupnosti lze získat vynásobením předchozího členu konstantou q. Například $a_5 = a\,q^4 = (a\,q^3)q = a_4\,q$.

Rekurentní definice geometrické posloupnosti je pak následující:

1. $a_1 = a$,
2. $a_{n+1} = a_n\,q$, $n = 1, 2, 3,\ldots$

Lze konstatovat, že daná posloupnost je geometrická právě tehdy, je-li podíl dvou následujících členů stále stejný.

Pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti platí vzorec:

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{6.4}$$

Tento vzorec si ještě později odvodíme.

U posloupností budeme kromě omezenosti a monotónnosti dále zkoumat konvergenci.

LIMITA POSLOUPNOSTI

Reálné číslo a se nazývá *vlastní limita* posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tehdy, platí-li $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon \in \mathbf{R})\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon$.

Limitu posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ pak zapisujeme takto: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

__Úmluva:__

Limitu posloupnosti vždy určujeme v nevlastním bodě, proto budeme dále psát jen lim $a_n = a$.

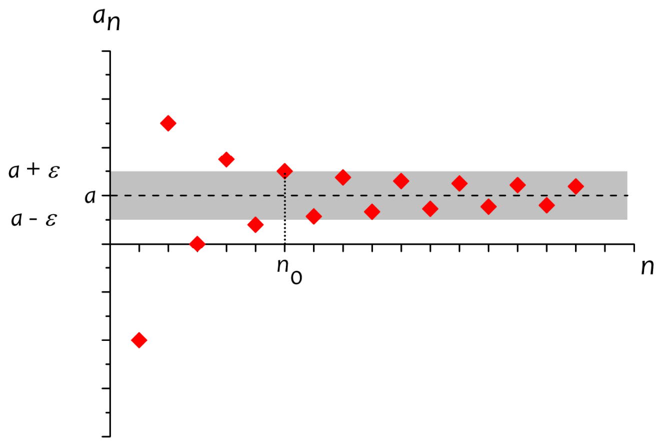
Poznámka:

Definice limity posloupnosti je vlastně přesnou formulací jakési intuitivní představy, že a_n se neomezeně blíží k a, jestliže n roste nade všechny meze, což je názorně zachyceno v obr. 6.2.

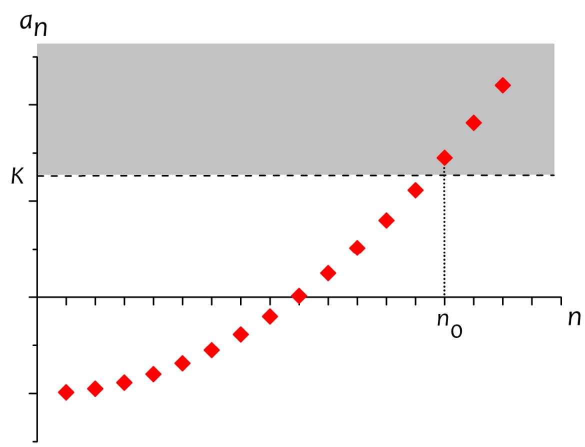
Posloupnost se nazývá *konvergentní*, pokud má vlastní limitu $a \in \mathbf{R}$. Posloupnost se nazývá *divergentní*, pokud není konvergentní.

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má *nevlastní limitu* +∞ (viz obr. 6.3), jestliže $\forall K \in R\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n > K$.

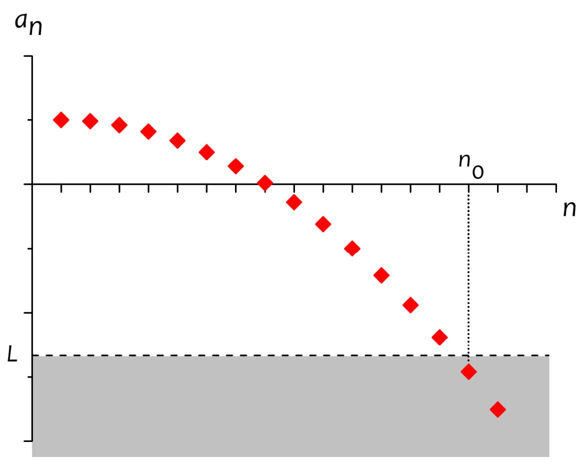
Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má *nevlastní limitu* -∞ (viz obr. 6.4), jestliže $\forall L \in R\ \exists n_0 \in \mathbf{N},\ \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n < L$.



Obrázek 6.2 Znázornění konvergentní posloupnosti a_n



Obrázek 6.3 Znázornění posloupnosti a_n s nevlastní limitou +∞



Obrázek 8.3 Znázornění posloupnosti a_n s nevlastní limitou -∞

TVRZENÍ O LIMITÁCH POSLOUPNOSTÍ

i. Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

ii. Každá konvergentní posloupnost je omezená.

(pozor- obrácená věta neplatí, viz $a_n = (-1)^n$)

iii. Každá omezená monotónní posloupnost je konvergentní. Každá shora omezená neklesající posloupnost je konvergentní. Každá zdola omezená nerostoucí posloupnost je konvergentní.

iv. $\lim \frac{1}{n} = 0$; $\lim -\frac{1}{n} = 0$; $\lim (-1)^n \frac{1}{n} = 0$; $\lim \frac{1}{n^r} = 0$, kde $r > 0$.

v. Nechť a_n a b_n jsou konvergentní posloupnosti a nechť $\lim a_n = A$ a $\lim b_n = B$, nechť je c libovolné reálné číslo ($c \in \mathbf{R}$). Potom jsou konvergentní i posloupnosti $a_n + b_n$, $a_n - b_n$, $a_n b_n$, $c\,a_n$ a platí:

$\lim (a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = A + B$,

$\lim (a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n = A - B$,

$\lim (a_n b_n) = \lim a_n \lim b_n = A B$,

$\lim (c\,a_n) = c \lim a_n = c A$.

Nechť navíc jsou nenulová čísla B a b_n pro všechna přirozená n ($n \in \mathbf{N}$). Potom je konvergentní i posloupnost a_n / b_n a platí:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n} = \frac{A}{B}.$$

Definujeme-li pro tzv. *rozšířenou množinu reálných čísel* $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ a pro každé a reálné ($a \in \mathbf{R}$) následující vztahy:

$-\infty < a < +\infty$,

$a + \infty = +\infty$,

$a - \infty = -\infty$,

$a\,(+\infty) = +\infty$ pro $a > 0$,

$a\,(+\infty) = -\infty$ pro $a < 0$,

$a\,(-\infty) = -\infty$ pro $a > 0$,

$a\,(-\infty) = +\infty$ pro $a < 0$,

$a \,/\, \pm\infty = 0$,

$(+\infty) \,/\, a = +\infty$ pro $a > 0$,

$(+\infty) \,/\, a = -\infty$ pro $a < 0$,

$(-\infty) \,/\, a = -\infty$ pro $a > 0$,

$(-\infty) \,/\, a = +\infty$ pro $a < 0$,

$a \,/\, 0 = +\infty$ pro $a > 0$,

$a \,/\, 0 = -\infty$ pro $a < 0$.

Pozor! Nedefinujeme tzv. neurčité výrazy:

$0\,(\pm\infty)$; $(+\infty) + (-\infty)$; $(\pm\infty/\pm\infty)$; $(\pm\infty \,/\, 0)$; $(0 \,/\, 0)$.

Platí pak další tvrzení:

vi. Jedná-li se o definované operace s $\pm\infty$, platí tvrzení (v.) i pro A, B nevlastní.

vii. Žádná aritmetická posloupnost s diferencí $d \neq 0$ nemá vlastní limitu.

viii. Pro geometrickou posloupnost a_n platí: $\lim a_n = 0$ pro $|q| < 1$, vlastní $\lim a_n$ neexistuje pro $|q| > 1$; $q = -1$.

ix. $\lim a_n = 0 \;\Leftrightarrow\; \lim |a_n| = 0$.

Příklad:

Rozhodněte o existenci vlastní limity posloupností, spočtěte:

(a) $\lim \frac{1-n}{n^2} = \lim \frac{\frac{1}{n^2} - \frac{n}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2}} = \frac{\lim \frac{1}{n^2} - \lim \frac{1}{n}}{\lim 1} = \frac{0-0}{1} = 0$, konvergentní posloupnost.

(b) $\lim\frac{5n^3-3n+2}{n^3}=\lim\frac{\frac{5n^3}{n^3}-\frac{3n}{n^3}+\frac{2}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}}=\frac{\lim 5-\lim\frac{3}{n^2}+\lim\frac{2}{n^3}}{\lim 1}=\frac{5-0+0}{1}=5$, konvergentní posloupnost.

(c) $\lim\frac{2n^3}{n-1}=\lim\frac{\frac{2n^3}{n^3}}{\frac{n}{n^3}-\frac{1}{n^3}}=\frac{\lim 2}{\lim\frac{1}{n^2}-\lim\frac{1}{n^3}}=\frac{2}{0}=+\infty$, divergentní posloupnost.

(d) $\lim\frac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}=\lim\frac{\frac{n}{2}(n+1)}{n^2}=\lim\frac{n^2+n}{2n^2}=\ldots=1/2$, konvergentní posloupnost.

(e) $\lim\frac{n!}{(n+1)!-n!}=\lim\frac{n!}{n!(n+1-1)}=\lim\frac{1}{n}=0$, konvergentní posloupnost.

LIMITNÍ PŘECHOD V NEROVNOSTI

Mějme posloupnosti a_n, b_n, c_n, které mají vlastní či nevlastní limity. Platí následující tvrzení:

x. Je-li $a_n \le b_n$ pro všechna n, pak platí $\lim a_n \le \lim b_n$.

xi. Platí-li $a_n \le c_n \le b_n$ všechna přirozená n a zároveň $\lim a_n = \lim b_n = a \in \mathbf{R}$, pak $\lim c_n = a$.

xii. Je-li $a_n \le b_n$ pro všechna přirozená n a zároveň $\lim a_n = +\infty$, pak platí $\lim b_n = +\infty$.

xiii. Je-li $a_n \le b_n$ všechna přirozená n a zároveň $\lim b_n = -\infty$, pak platí $\lim a_n = -\infty$.

Příklad:

Určíme $\lim\frac{\sin n}{n}$ s použitím tvrzení (xi.). Platí $-\frac{1}{n}\le\frac{\sin n}{n}\le\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbf{N}$, přitom $\lim\frac{-1}{n}=\lim\frac{1}{n}=0$, tedy i $\lim\frac{\sin n}{n}=0$.

<u>*Poznámka:*</u>

Jednou z možností zavedení užitečné konstanty - Eulerova čísla e (základu přirozených logaritmů) - je definice pomocí limity posloupnosti, respektive limit posloupností. Platí

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e\,.$$

ŘADY

S pojmem posloupnost je úzce spojen pojem řada. Řada vznikne sečtením prvků posloupnosti. Takže je-li dána posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, výraz ve tvaru

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots, \tag{6.5}$$

se nazývá *řada* (*nekonečná řada*). Členy posloupnosti se nazývají *členy řady*. Zapisujeme také pomocí sumy:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

Jelikož řada je definovaná jako součet, budeme se hlavně zajímat o to, zda danou řadu lze nebo nelze sečíst, tedy je-li tento součet konečné číslo.

Řadu se nazveme *konvergentní*, pokud je její součet reálné číslo. V opačném případě se řada nazývá *divergentní.*

Pojem konvergence a divergence je známý již z limit. Zde se vyskytuje oprávněně, možnost sečíst řadu opravdu souvisí s existencí limity určité posloupnosti a to níže definované *posloupnosti částečných součtů.*

Mějme posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Člen posloupnosti částečných součtů s_k vznikne jako součet $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$. Tedy

$s_1 = a_1$

$s_2 = a_1 + a_2$

$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$

.....

$s_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k$

Příklad:

Mějme geometrickou posloupnost a_n s prvním členem a_1 a kvocientem q, určete vztahy pro posloupnost částečných součtů pro různá q.

Řešení:

1. $q = 1$

$$s_n = a_1 + a_1 + a_1 + \dots + a_1 = n\, a_1.$$

2. $q \neq 1$

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n.$$

Tento součet si přepíšeme pomocí vztahu n-tého a prvního členu geometrické posloupnosti…

$$s_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1}.$$

Rovnost vynásobíme kvocientem q...

$$s_n q = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n.$$

V dalším kroku od sebe předchozí řádky odečteme...

$$s_n - s_n q = a_1 - a_1 q^n.$$

A nakonec už jen upravíme ...

$$s_n (1 - q) = a_1 (1 - q^n)$$

$$s_n = a_1 (1 - q^n) / (1 - q).$$

V předchozím příkladu jsme si odvodili vzorec pro součet s_n prvních n členů geometrické posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve tvaru:

$$s_n = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}. \tag{6.6}$$

<u>Poznámka</u>:

Dáváme pozor na hodnotu spodní meze u symbolu sumy. V řadě případů nezačíná číslem 1, jde ale jen o stanovení hodnoty prvního členu.

Příklad:

Je dána řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Posloupnost částečných součtů pak bude vypadat takto:

$$s_0 = a_0 = 1.$$

$$s_1 = a_0 + a_1 = 1 + 1/2 = 1{,}5.$$

$$s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = 1 + 1/2 + 1/4 = 1{,}75.$$

$$s_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 1{,}875.$$

$$s_4 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 = 1{,}9375.$$

$$s_5 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 = 1{,}96875.$$

Na tomto příkladu je vidět, jak souvisí součet řady s posloupností částečných součtů. Členy této posloupnosti se se vzrůstajícím n stále více blíží k číslu 2. Můžeme se tedy domnívat, že součet všech členů posloupnosti a_n bude právě 2.

Platí *tvrzení o součtu nekonečné řady*: řada je konvergentní právě tehdy, když je konvergentní posloupnost jejích částečných součtů, limita posloupnosti částečných součtů je rovna součtu s této řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n = s. \tag{6.7}$$

Příklad:

Součet řady z předchozího příkladu bude tedy vypadat následovně. Jelikož se v tomto případě jedná o geometrickou posloupnost s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem $q = ½$, platí vztah (6.6) $s_n = a_1(1 - q^n)/(1 - q)$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim_{n\to\infty} 1\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{2^n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 2-0=2.$$

Řada tedy konverguje, protože konverguje její posloupnost částečných součtů, součet je roven 2.

Pro geometrickou řadu s prvním členem a_1 a kvocientem q platí tvrzení, že pro $|q| < 1$ řada konverguje; pro $|q| \geq 1$ řada diverguje. Pokud řada konverguje, její součet s je roven:

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{a_1}{1-q}. \tag{6.8}$$

Příklad:

Rozhodněte, zda je daná geometrická řada konvergentní, v kladném případě určete součet.

a) $\frac{5}{2}+\frac{5}{4}+\frac{5}{8}+\frac{5}{16}+....$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{2-n}.$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}.$

Řešení:

a) $a_1 = 5/2$; $q = 1/2$; $|q| < 1$ a řada tedy konverguje; $s = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^n} = \frac{\frac{5}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 5.$

b) $a_1 = -1/3$; $q = -3$; $|q| \geq 1$ a řada tedy diverguje.

c) $a_1 = -3$; $q = -1/3$; $|q| < 1$ a řada tedy konverguje; $s = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2} = \frac{-3}{1+\frac{1}{3}} = \frac{-3}{\frac{4}{3}} = -\frac{9}{4}.$

Cílové znalosti

1. Základní definice posloupnosti.
2. Základní pojmy: omezenost, monotonie.
3. Základní typy posloupností (aritmetická, geometrická), vlastnosti.
4. Limita posloupnosti.
5. Rozhodnout o existenci limity posloupnosti, spočítat limitu posloupnosti.
6. Definice nekonečné řady, posloupnost částečných součtů, součet řady.