

Univerzita Palackého v Olomouci
Přírodovědecká fakulta

Vybrané optické problémy týkající se 3D senzorů

Pavel Pavlíček

Olomouc 2012

Oponent: RNDr. Petr Šmíd, Ph.D.

Publikace byla připravena v rámci projektu Investice do rozvoje vzdělávání

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem
a státním rozpočtem České republiky

1. vydání

© Pavel Pavlíček, 2012

© Univerzita Palackého v Olomouci, 2012

Neoprávněné užití tohoto díla je porušením autorských práv a může zakládat
občanskoprávní, správněprávní, popř. trestněprávní odpovědnost.

ISBN 978-80-244-3108-6

NEPRODEJNÉ

Obsah

Vybrané optické problémy týkající se 3D senzorů	5
1 Stručná historie interferometrie v bílém světle	5
1.1 Brewsterovy proužky	7
1.2 Michelsonovo měření délky prototypu metru	7
1.3 Interferometrie v bílém světle jako metoda pro měření tvaru předmětů	10
1.4 Dva typy interferometrie v bílém světle	11
1.5 Interferometrie v bílém světle na hladkém povrchu	12
1.6 Interferometrie v bílém světle na drsném povrchu	14
2 Světelné a zářivé veličiny	16
2.1 Úvod	16
2.2 Zářivý tok – světelný tok	16
2.2.1 Zářivý tok	16
2.2.2 Světelný tok	17
2.3 Intenzita ozáření – osvětlení	18
2.3.1 Intenzita ozáření	18
2.3.2 Osvětlení	19
2.4 Zářivost – svítivost	20
2.4.1 Zářivost	20
2.4.2 Svítivost	21
2.5 Zář – jas	21
2.5.1 Zář	22
2.5.2 Jas	22
2.6 Anglické názvy	25
3 Výpočet obálky pomocí Hilbertovy transformace a vliv šumu	25
3.1 Úvod	25
3.2 Hilbertova transformace	27
3.3 Šum obálky	28
3.4 Nejistota měření	31
3.5 Korelační funkce šumu obálky	33
Použitá literatura	36



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

**Vzdělávání výzkumných pracovníků v Regionálním centru pokročilých
technologií a materiálů. CZ.1.07/2.3.00/09.0042¹**

Vybrané optické problémy týkající se 3D senzorů

Pavel Pavlíček

V následujícím textu je popsán obsah tří přednášek, které jsem připravil pro seminář Vzdělávání výzkumných pracovníků v Regionálním centru pokročilých technologií a materiálů v období od března 2010 do února 2012.

1 Stručná historie interferometrie v bílém světle

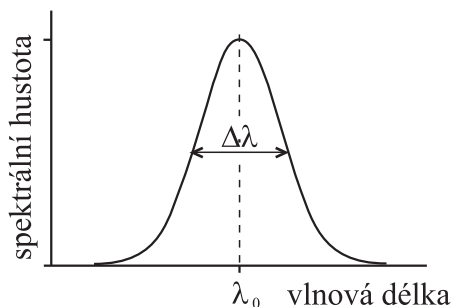
Interferometrie v bílém světle je interferometrická měřicí metoda, která používá světlo s velkou šířkou spektra. Český název této metody pochází z anglického názvu white-light interferometry. Vhodnější název metody by byl interferometrie v polychromatickém světle. Prívlastek bílý totiž nesouvisí s barevným vjemem, ale se šířkou spektra. Slovo bílý je v názvu metody použito jako protiklad slova monochromatický. Tím se interferometrie v bílém světle odlišuje od klasické interferometrie, která používá monochromatické zdroje světla, v dnešní době téměř výhradně lasery. V literatuře se interferometrie v bílém světle vyskytuje také pod názvem low coherence interferometry, tedy interferometrie s nízkou koherencí. Nízkou koherencí se myslí nízká časová koherence, která úzce souvisí se šířkou spektra.

¹Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem ČR.

Koherenční délka l_c a šířka $\Delta\lambda$ spektra jsou spolu vzájemně svázány. Pro světlo s gaussovským spektrem platí

$$l_c = \frac{\sqrt{\ln 2}}{\pi} \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda} \cong \frac{1}{4} \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}, \quad (1)$$

kde λ_0 je střední vlnová délka světla. Šířka $\Delta\lambda$ spektra je definována jako plná šířka v polovině maximální hodnoty (FWHM = full width on half maximum), jak je znázorněno na obr. 1.



Obr. 1: Definice šířky $\Delta\lambda$ spektra a střední vlnové délky λ_0 .

V interferometrii v bílém světle se jako zdroje světla používají svítící diody (LED), superluminescenční diody (SLD), žárovky nebo výbojky. Šířka spektra u svítících a superluminescenčních diod je obvykle od 10 do 60 nm, což odpovídá rozsahu koherenční délky od 2 do 20 μm . Spektrum žárovek a výbojek zahrnuje celou oblast viditelného a blízkého infračerveného světla a jejich koherenční délka je kratší ($\sim 1 \mu\text{m}$). Odtud je zřejmý název interferometrie s nízkou koherencí. Některé vlastnosti zdrojů světla jsou popsány v části 2.

Na první pohled by se mohlo zdát, že interferometrie v bílém světle je protimluv. Je to způsobeno představou, že interferovat může pouze světlo monochromatické. Podmínkou vzniku interference není monochromatické, nýbrž koherentní světlo. Ukazuje se, že prostorová koherence je pro vznik interference podstatně důležitější než časová koherence. Pokud je světlo prostorově koherentní, může interferovat bez ohledu na šířku spektra. Důležité je, že dráhový rozdíl mezi paprsky, které spolu mají interferovat, musí být v rozsahu koherenční délky. Toho se využívá u interferometrie v bílém světle, kde paprsky interferují pouze

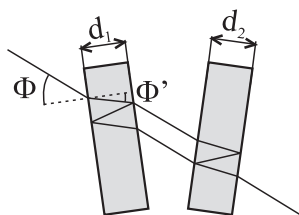
tehdy, pokud dráhový rozdíl mezi nimi není větší než několik mikrometrů.

1.1 Brewsterovy proužky

Zřejmě první zmínka o interferenci bílého (polychromatického) světla pochází z roku 1817, kdy byla popsána Davidem Brewsterem (1781 – 1868). Takzvané Brewsterovy proužky jsou pozorovány, když polychromatické světlo prochází dvěma tenkými destičkami s téměř shodnou tloušťkou, jak je to znázorněno na obr. 2. Jestliže d je tloušťka destiček a ϕ je úhel dopadu světla, pak dráhový rozdíl mezi prošlým a dvakrát odraženým paprskem je roven

$$\Delta = 2nd \cos \phi', \quad (2)$$

kde n je index lomu materiálu destičky a ϕ' je úhel lomeného paprsku. Interference v bílém světle se objeví, pokud $\Delta_1 - \Delta_2 = P\lambda_0$, kde P je malé celé číslo.



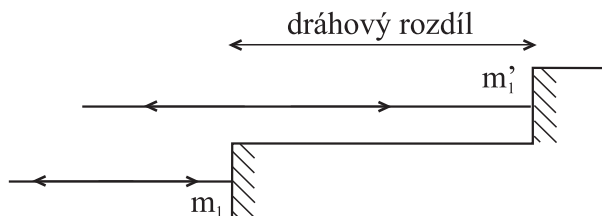
Obr. 2: Vznik Brewsterových proužků.

1.2 Michelsonovo měření délky prototypu metru

Již v roce 1827 navrhl Jacques Babinet (1794 – 1872), aby byl metr definován pomocí vlnové délky světla. To ale v jeho době nebylo technicky proveditelné. V roce 1892 se tohoto úkolu ujal Albert Abraham Michelson (1852 – 1931). Měření prováděl na prototypu metru, který je uložen v Úřadu pro míry a váhy v Sèvres u Paříže. K měření délky prototypu metru použil interferometr, který se dnes po něm nazývá Michelsonův interferometr. Jako metodu pro nastavení stejné délky obou ramen interferometru použil Michelson interferometrii v bílém

světla. Je nutné si uvědomit, že v Michelsonově době bylo podstatně složitější najít zdroj monochromatického světla než zdroj polychromatického světla.

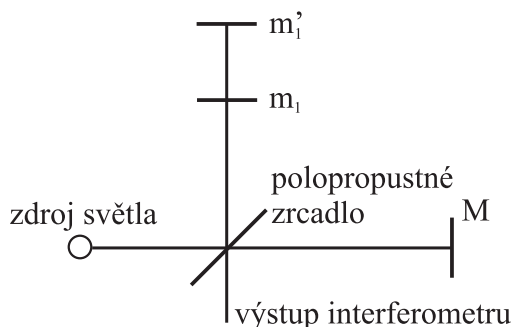
Michelson při svém měření použil červenou čáru kadmiové lampy ($\lambda_0 = 643,8\text{nm}$). Je to jediná z čar ve spektru kadmia, která nemá hyperjemnou strukturu. V Michelsonově době to byl nejkvalitnější použitelný zdroj monochromatického světla. Při dané vlnové délce odpovídá jeden metr posunutí interferenčního obrazce o přibližně 3,1 miliónu proužků. Pokud by se proužky počítaly rychlostí 1 proužek za vteřinu, osm hodin denně a šest dní v týdnu, trvalo by počítání přes čtyři měsíce. Kromě toho, použitá čára má koherenční délku přibližně 200 mm. Nebylo by tedy možné změřit délku celého metru. Proto Michelson pomocí počítání proužků stanovil napřed jen délku pomocného etalonu. Etalon se skládá ze dvou zrcadel m_1 a m'_1 a jeho tvar je zobrazen na obr. 3.



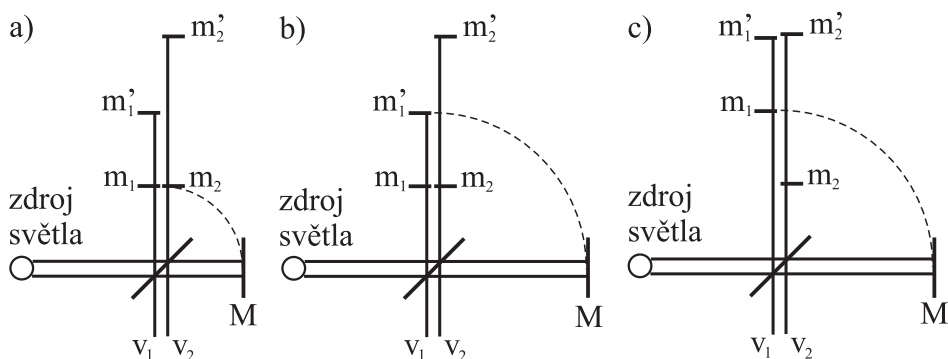
Obr. 3: Etalon použitý při měření délky prototypu metru.

Etalon byl vložen do jednoho ramene interferometru, jak je to nakresleno na obr. 4. Dráhový rozdíl mezi oběma zrcadly etalonu byl přibližně 0,4 mm, což odpovídalo 1212,35 proužků. Dále pak Michelson změřil dráhový rozdíl druhého etalonu. Dráhový rozdíl druhého etalonu byl přibližně dvojnásobný oproti dráhovému rozdílu prvního etalonu. Měření dráhového rozdílu druhého etalonu je znázorněno na obr. 5. V prvním kroku se pomocí zrcadla M vyrovnají polohy zrcadel m_1 a m_2 . To se provede tak, aby výstupní paprsky v_1 a v_2 vykazovaly interferenci bílého světla. Ve druhém kroku se zrcadlo M přesune tak, aby docházelo k interferenci bílého světla s paprskem odraženým od zrcadla m'_1 . Ve třetím kroku se první etalon posune tak, aby m_1 bylo tam, kde předtím bylo m'_1 . Potom se pomocí posuvu zrcadla M spočítá počet proužků červené čáry kadmiové lampy mezi zrcadly m'_1 a m'_2 . V

ideálním případě, kdyby byl dráhový rozdíl mezi zrcadly druhého etalonu přesně dvakrát větší než je tomu u prvního etalonu, byl by tento počet nula. Výhodou popsaného postupu je, že se počítá jen počet proužků, který odpovídá rozdílu délky druhého etalonu a dvojnásobku délky prvního etalonu.



Obr. 4: Umístění etalonu do Michelsonova interferometru.



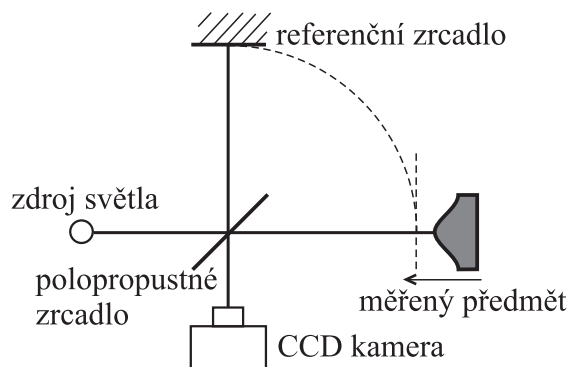
Obr. 5: Měření délky druhého etalonu: a) první krok, b) druhý krok, c) třetí krok.

Stejným způsobem určil Michelson délku třetího, čtvrtého a postupně až devátého etalonu, který měl dráhový rozdíl mezi zrcadly 256 krát delší než první etalon. Devátý etalon měl tedy dráhový rozdíl mezi zrcadly přibližně 10 cm. Nakonec byl devátý etalon posunut desetkrát a výsledný dráhový rozdíl byl porovnán s délkou prototypu metru. Měření délky prototypu metru je popsáno v článku: A. A. Michelson, J. R. Benoit: Détermination expérimentale de la valeur du metre en

longueurs d'ondes lumineuses, Trav. et Mem. Bur. Int. Poids et Mes. 11, pp 1 - 42 (1895).

1.3 Interferometrie v bílém světle jako metoda pro měření tvaru předmětů

Pro měření geometrického tvaru předmětů se interferometrie v bílém světle začala používat na začátku devadesátých let dvacátého století. Její rozšíření souvisí s rozvojem polovodičových kamer a zpracování dat v počítačích. Experimentální sestava interferometrie v bílém světle je schematicky znázorněna na obr. 6.

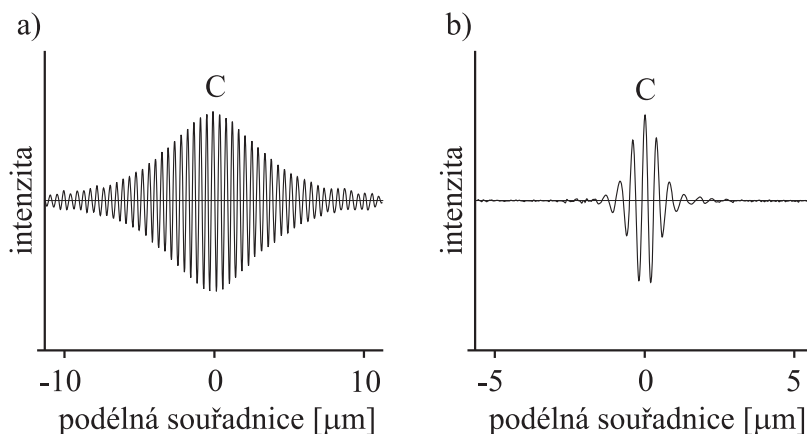


Obr. 6: Schematické znázornění měřicí sestavy interferometrie v bílém světle.

Obvykle se používá Michelsonův interferometr. Měřený předmět se umístí do interferometru místo jednoho ze zrcadel. Druhé zrcadlo se nazývá referenční zrcadlo. Při měření se předmět posouvá podél optické osy, jak je naznačeno šipkou na obr. 6. Na výstupu interferometru se zaznamenává intenzita jako funkce podélné souřadnice. Zaznamenaná intenzita se nazývá interferogram. Intenzita nabývá maximální hodnoty v okamžiku, kdy je optická délka obou ramen interferometru stejná.

Příklad naměřených interferogramů je zobrazen na obr. 7. V případě interferogramu na obr. 7(a) je zdrojem světla svítící dioda, v případě interferogramu na obr. 7(b) žárovka. Z obr. 7 je patrné, že koherenční délka světla žárovky je podstatně kratší než je tomu u svítící diody.

Kratší koherenční délka se projeví menší šířkou interferogramu.



Obr. 7: Příklad interferogramu. (a) Zdroj světla je svítící dioda. (b) Zdroj světla je žárovka.

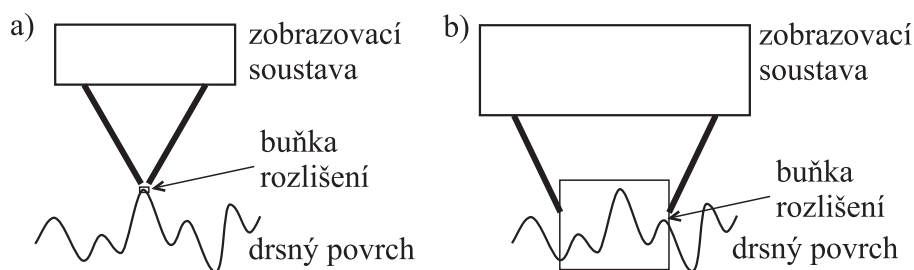
Z polohy středu interferogramu je možné určit podélnou souřadnici povrchu měřeného předmětu. Střed interferogramu je na obr. 7 označen písmenem C. Při měření tvaru předmětu se jako detektoru používá CCD kamera, to znamená, že se měří několik set tisíc až několik miliónů interferogramů současně, podle počtu pixelů kamery. Tím, že se naleznou polohy středů interferogramů ve všech pixelech, se získá informace o tvaru té části předmětu, která se nachází v zorném poli kamery.

1.4 Dva typy interferometrie v bílém světle

Z hlediska vzniku signálu se rozlišují dva typy interferometrie v bílém světle: Interferometrie v bílém světle na opticky hladkém povrchu a interferometrie v bílém světle na opticky drsném povrchu. Opticky hladkým povrchem se myslí povrch, jehož výškové rozdíly v buňce rozlišení zobrazovací soustavy nepřevyšují osminu vlnové délky použitého světla. Opticky drsným povrchem se myslí povrch, jehož výškové rozdíly v buňce rozlišení převyšují čtvrtinu vlnové délky světla. Buňka rozlišení je plocha na měřeném povrchu, která má stejnou velikost jako plocha Airiho disku dané zobrazovací soustavy. Velikost buňky rozlišení je tedy dána vlnovou délkou použitého světla a numerickou aperturou

zobrazovací soustavy. Například pro mikroskopový objektiv s numericou aperturou NA má buňka rozlišení tvar kruhu o průměru $1,22\lambda/NA$, přičemž λ je vlnová délka použitého světla.

Jak je vidět, existuje taková třída povrchů, jejichž výškové rozdíly převyšují osminu vlnové délky a nepřevyšují čtvrtinu vlnové délky použitého světla. Tyto povrchy nelze jednoznačně zařadit do jedné ze dvou skupin. Takové povrchy vykazují podle okolností vlastnosti typické pro jednu nebo druhou skupinu. Jestli je povrch opticky hladký nebo drsný, závisí na mechanické drsnosti, vlnové délce použitého světla a také na buňce rozlišení použité zobrazovací soustavy. Například broušené sklo se chová jako opticky hladký povrch pod mikroskopem s vysokou aperturou. Závislost toho, jestli je daný povrch hodnocen jako opticky hladký nebo drsný, na velikosti buňky rozlišení je znázorněna na obr. 8.

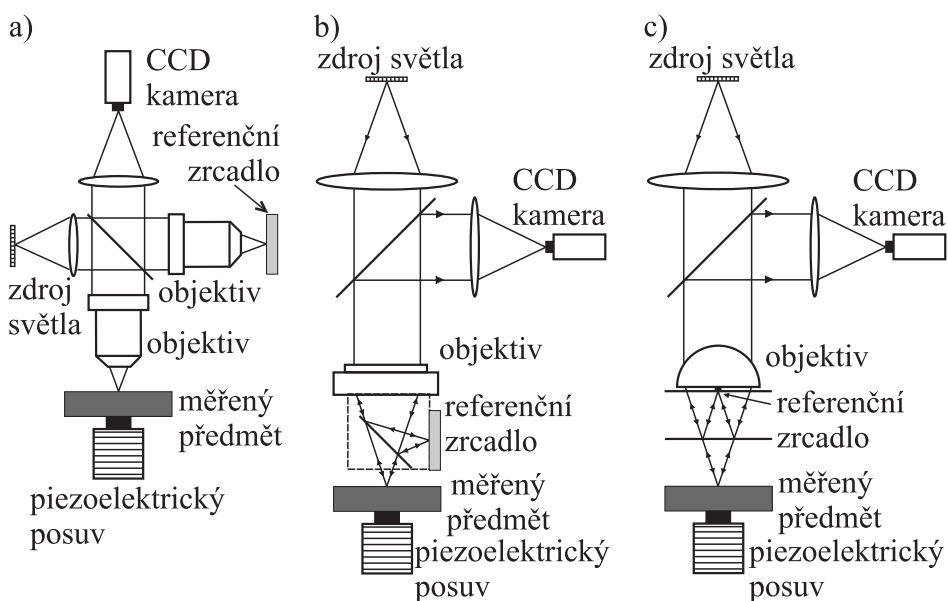


Obr. 8: Vliv velikosti buňky rozlišení optické soustavy na to, jestli je povrch hodnocen jako opticky hladký nebo drsný. (a) Malá buňka rozlišení, povrch opticky hladký. (b) Velká buňka rozlišení, povrch opticky drsný.

1.5 Interferometrie v bílém světle na hladkém povrchu

Experimentální sestava interferometrie v bílém světle na hladkém povrchu je znázorněna na obr. 9. Interferometrie v bílém světle na hladkém povrchu se téměř výhradně používá v mikroskopovém uspořádání, což souvisí s výkladem k obr. 8. V obou ramenech interferometru jsou použity mikroskopové objektivy, které zobrazují povrch měřeného předmětu a povrch referenčního zrcadla. Michelsonův interferometr, v

jehož obou ramenech se použijí mikroskopové objektivy se nazývá Linnikův interferometr [obr. 9(a)]. Protože disperze má negativní vliv na tvar interferogramu (zvětšuje jeho šířku a snižuje jeho kontrast), musí být použité mikroskopové objektivy pokud možno totožné. Problém s použitím dvou mikroskopových objektivů je možné obejít tím, že se použije pouze jeden tzv. interferenční mikroskopový objektiv. Ten v sobě kromě mikroskopového objektivu zahrnuje také dělič světla a referenční zrcadlo. Pro malá zvětšení se používá Michelsonovo uspořádání [obr. 9(b)] a pro velká zvětšení se používá Mirauovo uspořádání [obr. 9(c)]. K pohybu předmětu během měření se obvykle používá piezoelektrický posuv.



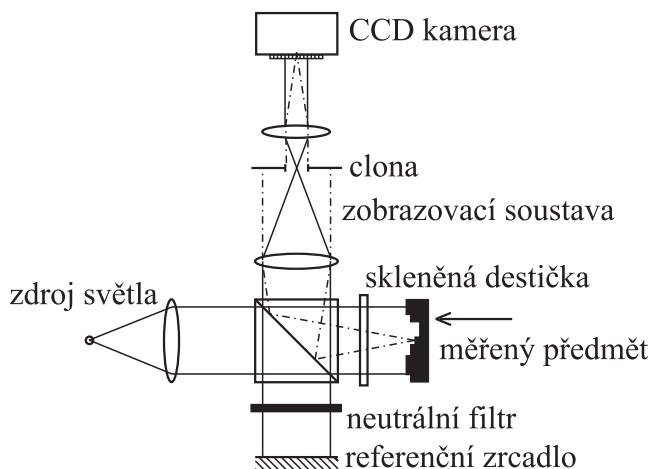
Obr. 9: Interferometrie v bílém světle na hladkém povrchu. (a) Linnikovo uspořádání. (b) Michelsonovo uspořádání. (c) Mirauovo uspořádání.

Interferometrie v bílém světle na hladkém povrchu funguje podobně jako klasická interferometrie. Tím, že se vyhodnotí fáze interferogramu, je možné určit vyvážení interferometru na setiny střední vlnové délky. Střední maximum interferogramu má nejvyšší kontrast a dá se odlišit od ostatních maxim. Odpadá tak problém s nejednoznačností, což je omezující podmínka u klasické interferometrie. Nejistota měření u in-

terferometrie v bílém světle na hladkém povrchu se pohybuje v řádu nanometrů.

1.6 Interferometrie v bílém světle na drsném povrchu

Experimentální sestava interferometrie v bílém světle na drsném povrchu je znázorněna na obr. 10. Obvykle se používá Michelsonův interferometr, v jehož jednom rameni je umístěn měřený předmět a v druhém referenční zrcadlo. Za normálních okolností odráží měřený předmět podstatně méně světla než referenční zrcadlo. Aby byly intenzity světla v obou ramenech přibližně stejné, vkládá se do referenčního ramena interferometru neutrální filtr. Ten s sebou ovšem přináší disperzi, která má na interferometrii v bílém světle negativní vliv, jak bylo zmíněno v části 1.5. Proto se vliv disperze neutrálního filtru kompenzuje skleněnou destičkou vloženou do předmětového ramena interferometru.



Obr. 10: Interferometrie v bílém světle na drsném povrchu.

V případě interferometrie v bílém světle na drsném povrchu je buňka rozlišení zobrazovací soustavy větší než perioda mikrostruktury povrchu. Zobrazovací soustava nedokáže mikrostrukturu povrchu rozlišit. Vlivem drsného povrchu a prostorové koherence vykazuje obraz drsného povrchu na CCD kameře koherenční zrnitost (spekly). Vlivem koherenční zrnitosti má fáze interferogramu náhodnou hodnotu

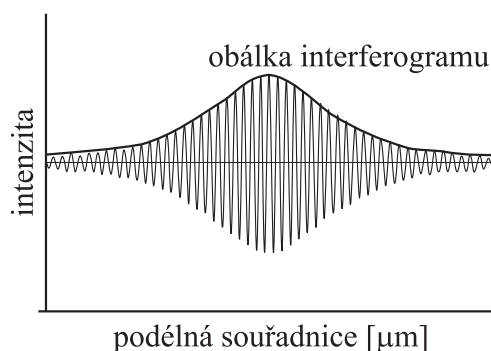
v rozmezí $\langle 0, 2\pi \rangle$. Z toho důvodu nemá smysl fázi interferogramu vyhodnocovat, vyvážení interferometru se určuje pouze z maxima obálky interferogramu. Obálka interferogramu je znázorněna na obr. 11. Standardní metoda pro výpočet obálky z naměřeného interferogramu je výpočet pomocí Hilbertovy transformace. Hilbertova transformace však vyžaduje velké množství provedených výpočtů, což vedlo k tomu, že byla vyvinuta řada náhradních algoritmů. V poslední době vzrostla výkonnost počítačů natolik, že se obálka počítá převážně pomocí Hilbertovy transformace.

Protože se vyvážení interferogramu a tím i naměřená podélná souřadnice povrchu předmětu určuje pouze z maxima obálky interferogramu, je nejistota měření podstatně vyšší než u interferometrie v bílém světle na hladkém povrchu. Teoretický rozbor a experimenty ukazují, že nejistota δz měření dosahuje u interferometrie v bílém světle na drsném povrchu hodnot srovnatelných s drsností povrchu

$$\delta z = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\langle I \rangle}{I}} R_q. \quad (3)$$

Symbolem R_q je označena střední hodnota kvadratické drsnosti, I je hodnota intenzity v daném zrně koherenční zrnitosti a $\langle I \rangle$ je střední hodnota intenzity středovaná přes všechna zrna. Intenzity I a $\langle I \rangle$ se rozumějí za předpokladu, že referenční větev interferometru je zastíněna, to znamená, že vliv interference je potlačen. Rozdělení intenzity v jednotlivých zrnech koherenční zrnitosti se řídí statistickými zákony. Pro polychromatické světlo, které se používá v interferometrii v bílém světle, je intenzita v jednotlivých zrnech určena podle rozdělení gama. To znamená, že nejvíce zrn má intenzitu blízkou nule, s rostoucí intenzitou počet zrn, která takovou intenzitu vykazují, klesá. Podle rovnice (3) nabývá nejistota měření nízkých hodnot v zrnech s vysokou intenzitou.

Pro dosažení vysokého kontrastu je výhodné, aby jedno zrno připadalo přibližně na jeden pixel CCD kamery. Jinak řečeno, velikost zrn by měla být stejná jako velikost pixelů. Velikost zrn koherenční zrnitosti se nastavuje pomocí clony v zobrazovací soustavě interferometru.



Obr. 11: Obálka interferogramu.

2 Světelné a zářivé veličiny

2.1 Úvod

Zářivé veličiny popisují vlastnosti záření nezávisle na tom, jaký je použit detektor. Naproti tomu, světelné veličiny popisují vlastnosti záření na základě toho, jak záření vnímá lidské oko. Proto je možné zářivé a světelné veličiny rozdělit do dvojic, kdy každé zářivé veličině odpovídá její ekvivalentní světelná veličina. V tomto textu se zabýváme veličinami, které se používají nejčastěji. Jsou to:

zářivý tok - světelný tok,
 intenzita ozáření - osvětlení,
 zářivost - svítivost,
 zář - jas.

Uvedené zářivé a světelné veličiny jsou v tomto přehledu uvedeny po dvojicích sobě odpovídajících veličin.

2.2 Zářivý tok - světelný tok

2.2.1 Zářivý tok

Zářivý tok Φ_e je výkon záření, které vychází ze zdroje. Jeho jednotkou je watt (W). Jako příklad zdroje záření je možné uvést žárovku. Žárovka o příkonu 100 W vyzařuje zářivý tok 100 W². Žárovka vyzařuje v širokém spektru, které zahrnuje viditelnou a infračervenou oblast

²V tomto ilustrativním příkladu zanedbáváme tepelnou energii, která je odváděna patičkou žárovky.

elektromagnetického záření. Spektrální rozložení záření není z hlediska veličiny zářivý tok důležité.

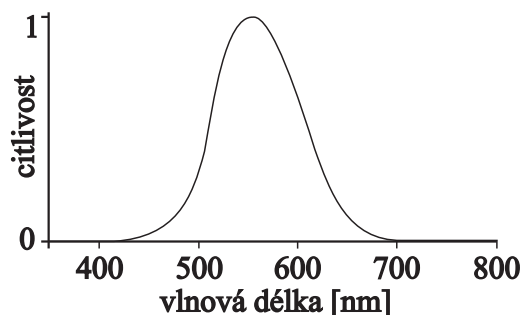
2.2.2 Světelný tok

Světelný tok Φ_e je zářivý tok přepočítaný podle citlivosti lidského oka

$$\Phi = K_m \int_0^{\infty} \Phi_{e\lambda} V(\lambda) d\lambda, \quad (4)$$

kde je $\Phi_{e\lambda}$ spektrální hustota zářivého toku, $V(\lambda)$ je relativní citlivost lidského oka a K_m je přepočítávací konstanta, jejíž hodnota je rovna $K_m = 683 \text{ lmW}^{-1}$. Jednotkou světelného toku je lumen (lm).

Relativní citlivost $V(\lambda)$ lidského oka je graficky znázorněna jako funkce vlnové délky λ na obr. 12. Hodnoty relativní citlivosti pro některé vlnové délky jsou uvedeny v tab. 1. Lidské oko má maximální citlivost pro vlnovou délku $\lambda = 555 \text{ nm}$. Z rovnice (4) plyne, že zdroj záření s vlnovou délkou 555 nm , který generuje zářivý tok 1 W , generuje světelný tok o velikosti 683 lm . Pro vlnové délky kratší než 380 nm (ultrafialová oblast) a delší než 780 nm (infračervená oblast) je citlivost lidského oka nulová. Zdroj záření s vlnovou délkou např. 900 nm generuje nulový světelný tok, bez ohledu na to, jaký je generovaný zářivý tok.



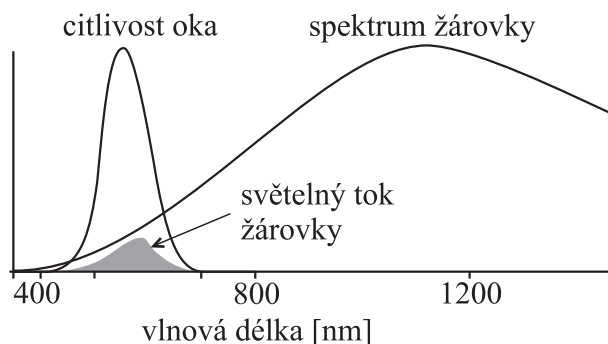
Obr. 12: Citlivost lidského oka.

Výpočet světelného toku žárovky je graficky znázorněn na obr. 13. Ke světelnému toku přispívá pouze ta část zářivého toku, která spadá do oblasti, v níž je lidské oko citlivé. Výpočet ukazuje, že žárovka o

Tab. 1: Hodnoty relativní citlivost lidského oka

vlnová délka [nm]	relativní citlivost [–]
555	1,0
633	0,247
780	10^{-5}

příkonu 100 W generuje světelný tok přibližně 1 300 lm. Její světelná účinnost je tedy 13 lm W^{-1} . Světelné účinnosti některých světelných zdrojů jsou uvedeny v tab. 2.



Obr. 13: Grafické znázornění výpočtu světelného toku žárovky.

Z tab. 2 plyne, že monochromatický zdroj s vlnovou délkou 555 nm má nejvyšší možnou světelnou účinnost. Běžná žárovka má poměrně nízkou světelnou účinnost, protože září převážně v infračervené oblasti spektra a jen malá část záření spadá do oblasti, v níž je lidské oko citlivé.

2.3 Intenzita ozáření - osvětlení

2.3.1 Intenzita ozáření

Intenzita ozáření E_e je zářivý tok, který dopadá na jednotkovou plochu kolmou ke směru záření. Jednotkou intenzity ozáření je watt na metr čtvereční (Wm^{-2}). Intenzita ozáření se spočítá jako podíl zářivého toku

Tab. 2: Hodnoty světelné účinnosti

zdroj světla	světelná účinnost [lm W ⁻¹]
laser 555 nm	683
laser 633 nm	168
laser 780 nm	0,0068
žárovka	13
halogenová žárovka	30
úsporná žárovka	50
svíticí dioda	100

Φ_e a plochy A , na níž dopadá

$$E_e = \frac{\Phi_e}{A}. \quad (5)$$

Jako příklad intenzity ozáření můžeme uvést solární konstantu. Solární konstanta udává, jak velký zářivý tok slunečního záření prochází jednotkovou plochou. Solární konstanta pro Zemi je rovna 1 367 Wm⁻² ve volném prostoru. Na povrchu Země je vlivem útlumu záření v atmosféře solární konstanta nižší, přibližně 1 000 Wm⁻². Pro srovnání uvádíme solární konstantu pro Venuši 2 610 Wm⁻² a Mars 590 Wm⁻². Obě hodnoty solární konstanty jsou uvedeny pro volný prostor bez započtení vlivu atmosféry planety.

2.3.2 Osvětlení

Osvětlení je definováno analogicky jako intenzita ozáření. V rovnici (5) se zářivý tok nahradí světelným tokem

$$E = \frac{\Phi}{A}. \quad (6)$$

Jednotkou osvětlení je lumen na metr čtvereční, tato jednotka má svůj vlastní název lux (lx).

V tab. 3 jsou uvedeny jako příklad některé hodnoty osvětlení, jak je známe z každodenního života.

Tab. 3: Hodnoty osvětlení

situace	osvětlení [lx]
slunečný den - jasno	100 000
letní den - zataženo	20 000
zimní den - zataženo	3 500
osvětlení fotbalového stadionu - norma UEFA	1 400
noc - úplněk	0,25
noc - nov	0,001

Pokud srovnáme hodnotu 100 000 lx z prvního řádku tab. 3 s hodnotou $1\,000\text{ Wm}^{-2}$ pro solární konstantu na povrchu Země, zjistíme že světelná účinnost slunečního světla je přibližně 100 lm W^{-1} . Tedy více než sedmkrát vyšší, než je světelná účinnost běžné žárovky. To je dáno tím, že teplota Slunce (6 000 K) je přibližně dvojnásobná oproti teplotě vlákna žárovky (3 000 K). Spektrum slunečního světla má své maximum ($\lambda = 555\text{nm}$) na přibližně poloviční vlnové délce, než je tomu u žárovky ($\lambda = 1\,100\text{nm}$). Do oblasti, v níž je lidské oko citlivé, spadá u slunečního světla větší část spektra než u světla žárovky.

2.4 Zářivost - svítivost

2.4.1 Zářivost

Zářivost I_e je podíl zářivého toku Φ_e a prostorového úhlu Ω , do kterého je tento zářivý tok vyzářen

$$I_e = \frac{\Phi_e}{\Omega}. \quad (7)$$

Jednotkou zářivosti je watt na steradián (W sr^{-1}). Jako příklad pro zářivost můžeme uvést žárovku o příkonu 100 W, o které předpokládáme, že vyzářuje rovnoměrně do celého prostoru ($\Omega = 4\pi\text{ sr}$). Zářivost takové žárovky je přibližně 8 W sr^{-1} . Naproti tomu laser o výkonu 1 mW, který má svazek s rozbíhavostí 1 obloukové minuty, vykazuje zářivost přibližně $12\,000\text{ W sr}^{-1}$. Zářivost je tedy tím vyšší, čím více je záření emitováno do jednoho směru.

2.4.2 Svítivost

Svítivost je definována analogicky jako zářivost. V rovnici (7) se tok záření nahradí světelným tokem

$$I = \frac{\Phi}{\Omega}. \quad (8)$$

Jednotkou svítivosti je lumen na steradián, tato jednotka má svůj vlastní název kandela (cd). Je to právě svítivost, která jako jediná světelná veličina patří mezi sedm základních veličin mezinárodní soustavy jednotek SI. Kandela je tedy základní jednotkou a je definována takto: *Kandela je svítivost zdroje, který v daném směru vysílá monochromatické záření s frekvencí $540 \cdot 10^{12}$ Hz a jehož zářivost v tomto směru je $1/683$ wattů na steradián.* Frekvence $540 \cdot 10^{12}$ Hz odpovídá vlnové délce 555 nm, při které je citlivost lidského oka nejvyšší. Uvedená definice platí od roku 1979. Do té doby se používala tato definice: Kandela je svítivost jedné šedesátiny cm^2 povrchu absolutně černého tělesa při teplotě tuhnutí platiny za tlaku $1,013 \cdot 10^5$ Pa. Takto byla kandela definována v roce 1948 a to tak, aby její velikost přibližně odpovídala dříve používaným jednotkám, které byly odvozeny od svítivosti svíčky. Proto se jednotka svítivosti jmenuje kandela (lat. candela = svíčka).

Rozdílná definice jednotky svítivosti (odvozená od svítivosti svíčky) a zářivosti (založená na jednotce W používané v mechanice) je důvodem, proč se musí při vzájemném přepočítávání světelných a zářivých veličin používat konstanta $K_m = 683 \text{ lmW}^{-1}$.

Jako příklad pro svítivost můžeme opět uvést žárovku o příkonu 100 W. Protože světelná účinnost žárovky je přibližně 13 lm W^{-1} , generuje žárovka světelný tok 1 300 lm. Pokud je světelný tok vyzářen rovnoměrně do celého prostoru, je svítivost žárovky přibližně 100 cd. He-Ne laser o výkonu 1 mW, který má svazek s rozbíhavostí 1 obloukové minuty, vykazuje zářivost přibližně $12\,000 \text{ W sr}^{-1}$, což odpovídá svítivosti $2 \cdot 10^6$ cd.

2.5 Zář - jas

Dvojice veličin zář - jas se používá pro popis plošných zdrojů záření

2.5.1 Zář

Zář L_e je podíl svítivosti I_e plošného zdroje záření a jeho plochy A_S

$$L_e = \frac{I_e}{A_S} = \frac{\Phi_e}{\Omega A_S}. \quad (9)$$

Pokud plocha zdroje není kolmá ke směru záření, bere se v úvahu pouze průmět plochy do směru kolmého ke směru záření. Jednotkou záře je watt na steradián a metr čtvereční ($\text{W sr}^{-1}\text{m}^{-2}$).

V následujícím příkladu spočítáme zář Slunce. Zvolíme prostorový úhel Ω , tak aby ve vzdálenosti s od Slunce k Zemi vytínal plochu 1 m^2 . To znamená $\Omega = 1 \text{ m}^2/s^2$. Do takového prostorového úhlu vyzařuje Slunce zářivý tok $1\,376 \text{ W}$ (což je hodnota solární konstanty). Za plochu A_S zdroje záření dosadíme plochu A_\odot slunečního disku.

$$L_e = \Phi_e \frac{s^2}{1\text{m}^2} \frac{1}{A_\odot}. \quad (10)$$

Podíl A_\odot/s^2 je roven kvadrátu úhlové velikosti Slunce při pohledu ze Země. Tento úhel je roven $0,5^\circ$, což odpovídá přibližně $8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. Po dosazení obdržíme výsledek

$$L_e = 1,3 \cdot 10^3 \frac{1}{(8 \cdot 10^{-3})^2} \cong 2 \cdot 10^7 \text{ W sr}^{-1}\text{m}^{-2}. \quad (11)$$

2.5.2 Jas

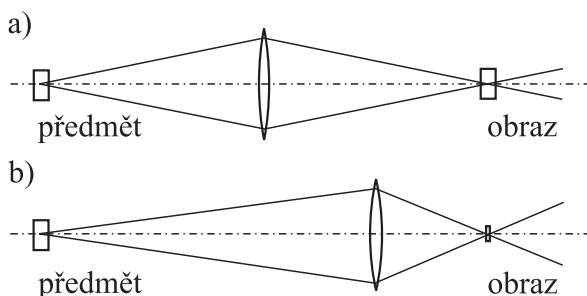
Jas je definován analogicky jako zář. Pouze v rovnici (9) se zářivost nahradí svítivostí a tok záření se nahradí světelným tokem

$$L = \frac{I}{A_S} = \frac{\Phi}{\Omega A_S}. \quad (12)$$

Jednotkou jasu je kandela na metr čtvereční (cd m^{-2}).

Velký význam obou veličin jasu i záře spočívá v tom, že jde o invariantní veličiny. Jas i zář při průchodu světla optickou soustavou zachovávají svoji hodnotu, kterou není možné zvýšit. Zachování hodnoty platí pouze pro ideální optickou soustavu, ve které nedochází k žádným ztrátám. Invariantnost jasu a záře je znázorněna na obr. 14. Intenzitu ozáření nebo osvětlení je možné zvýšit např. tím, že pomocí

spojné čočky soustředíme světlo na menší plochu. Hodnota jasu a záře zůstane zachována, protože při zmenšení plochy se zvýší prostorový úhel, do kterého je světlo vyzařováno. Celkový podíl $\Phi/(\Omega A_S)$ zůstává zachován.



Obr. 14: Znázornění invariantnosti jasu: (a) větší plocha, menší prostorový úhel, (b) menší plocha, větší prostorový úhel.

Skutečnost, že veličiny jas a zář jsou invariantní, má několik důsledků. Světelný výkon, který je možné navázat do optického vlákna, je dán pouze září světelného zdroje, průměrem jádra optického vlákna a jeho numerickou aperturou. Není možné sestavit světelný trychtýř, který by sesbíral světlo z velké plochy a někam je přivedl. Světlo sesbírané z velké plochy je sice možné soustředit do malé plošky, ale pouze za cenu velkého prostorového úhlu, jak je to znázorněno na obr. 14. Není možné navazovat postupně do optického vlákna světlo z více zdrojů a zvyšovat tak navázaný optický výkon.

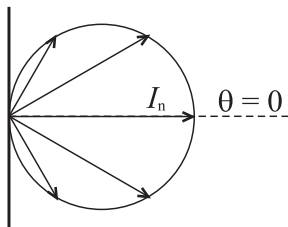
Protože není možné optickou soustavou jas zvýšit, je nutné konstruovat zdroje světla s vysokým jasnem. Nejvyšších hodnot jasu dosahují lasery. Z nemonochromatických zdrojů světla mají vysoký jas rtuťové a xenonové výbojové lampy. Jas rtuťových lamp je vyšší (až $170\,000\text{ cd cm}^{-2}$), ale jejich spektrum obsahuje čáry. Čárové spektrum se může nepříznivě projevovat v některých aplikacích, např. když je nutná barevná věrnost vidění. Xenonové lampy mají jas o něco nižší (až $110\,000\text{ cd cm}^{-2}$), ale jejich spektrum je spojitě. Xenonové výbojové lampy se používají např. ve světloometech automobilů nebo v projektorech v kině. Pro srovnání, jas Slunce je $160\,000\text{ cd cm}^{-2}$ a jas běžné žárovky je $1\,000\text{ cd cm}^{-2}$.

Jas sekundárních světelných zdrojů, to je takových, které samy ne-

září, se spočítá pomocí veličiny osvětlení. Předpokládáme, že plošný zdroj vyzařuje podle Lambertova zákona

$$I = I_n \cos \theta, \quad (13)$$

kde I_n je svítivost zdroje ve směru kolmém na plochu zdroje a θ je úhel vyzařování počítaný od kolmice k ploše zdroje. Zdroje světla, které vyzařují podle Lambertova zákona, se nazývají kosinové a jejich vyzařování je znázorněno na obr. 15. Přesně podle Lambertova zákona vyzařují dokonalé difúzní plochy. Vyzařování osvětlených matných povrchů se blíží vyzařování podle Lambertova zákona a to tím více, čím je povrch zdroje světla drsnější.



Obr. 15: Vyzařování podle Lambertova zákona.

Světelný tok dopadající na plochu A_S při osvětlení E je roven

$$\Phi_{in} = E \cdot A_S. \quad (14)$$

Světelný tok vyzářený touto plochou se spočítá integrací svítivosti z rovnice (13) přes celý poloprostor

$$\Phi_{out} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_n \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \pi I_n. \quad (15)$$

Jestliže zanedbáme ztráty, platí $\Phi_{out} = \Phi_{in}$. Pro svítivost I_n sekundárního zdroje v kolmém směru obdržíme

$$I_n = \frac{EA}{\pi}. \quad (16)$$

Jas sekundárního zdroje, který vyzařuje podle Lambertova zákona a je osvětlen osvětlením E , je roven podle rovnice (12)

$$L = \frac{E}{\pi}. \quad (17)$$

Jako příklad můžeme uvést jas bílého papíru při slunečním osvětlení. Podle rovnice (17) a tab. 3 má jas hodnotu přibližně $3 \cdot 10^4 \text{ cd m}^{-2}$.

S veličinou jas souvisí také normy pro kino a televizi. Lidské oko vnímá blikající obraz jako stabilní, pokud frekvence blikání přesáhne kritickou mez ν_{krit} . Kritická mez závisí na jasu obrazu podle fyziologického Ferryova - Porterova zákona

$$\nu_{krit} = 12 \log L + 33. \quad (18)$$

Proto například při frekvenci 48 Hz nesmí jas překročit 17 cd m^{-2} . Při projekci v kině to podle rovnice (17) znamená, že osvětlení plátna nesmí překročit 55 lx.

2.6 Anglické názvy

Na závěr uvádíme anglické názvy zmíněných světelných a zářivých veličin:

zářivý tok	radiant flux,
intenzita ozáření	irradiance,
zářivost	radiant intensity,
zář	radiance,
světelný tok	luminous flux,
osvětlení	illuminance,
svítivost	luminous intensity,
jas	luminance.

3 Výpočet obálky pomocí Hilbertovy transformace a vliv šumu

3.1 Úvod

Jak již bylo řečeno v části 1, u interferometrie v bílém světle na drsném povrchu se podélná souřadnice povrchu měřeného předmětu určuje ze středu obálky interferogramu. Matematicky můžeme interferogram popsat následujícím způsobem

$$f(z) = a + b \cdot c(z - h) \cos[2k_0(z - h) + \alpha]. \quad (19)$$

V rovnici (19) je z podélná souřadnice, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$ je střední vlnové číslo odpovídající střední vlnové délce λ_0 . Dále a je střední intenzita interferogramu, b je modulační intenzita, c je funkce obálky interferogramu, α je fázový posuv a h je podélná souřadnice povrchu předmětu, čili hledaná veličina. Určí se z naměřeného interferogramu, neboť funkce obálky c dosahuje maximum pro $z = h$.

Interferogram popsáný rovnicí (19) představuje autokorelační funkci amplitudy elektrického pole. Podle Wienerovy - Chinčinovy věty je autokorelační funkce rovna Fourierově transformaci spektra použitého světla. Jako příklad uvedeme světlo s gaussovským spektrem

$$S(k) = \exp \left[- \left(\frac{k - k_0}{2\Delta k} \right)^2 \right], \quad (20)$$

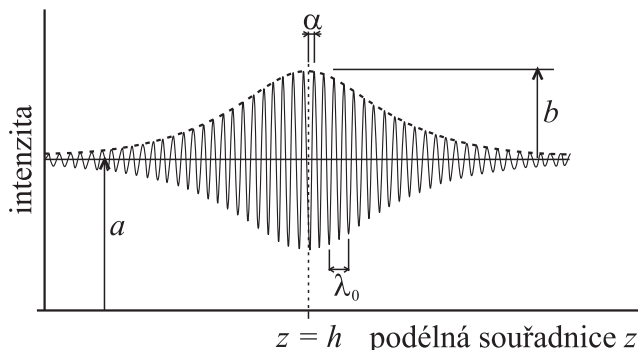
kde Δk je efektivní spektrální šířka a k je vlnové číslo.

Spektru popsánému rovnicí (20) odpovídá funkce obálky

$$c(z) = \exp \left[- \left(\frac{z - h}{l_c} \right)^2 \right], \quad (21)$$

kde $l_c = 1/(2\Delta k)$ je koherenční délka, jak je popsána rovnicí (1).

Příklad interferogramu je uveden na obr. 16, kde je také znázorněn význam veličin a , b , λ_0 , h a α . Obálka je na obr. 16 znázorněna čárkovaně.



Obr. 16: Příklad interferogramu.

Standardní metodou pro výpočet obálky je výpočet pomocí Hilbertovy transformace. Naměřený interferogram je ovlivněný šumem, který

pochází z více zdrojů. Mezi nejdůležitější z nich patří výstřelový šum, polohový šum a kvantizační šum. Výstřelový šum je způsoben nerovnoměrným dopadem fotonů na detektor, polohový šum je způsoben nerovnoměrným pohybem měřeného předmětu během měření a kvantizační šum je způsoben převodem analogových veličin na digitální. Mezi těmito zdroji zaujímá výsadní postavení výstřelový šum, protože je dán přirozenou vlastností světla a nemůže být ani teoreticky odstraněn.

Jestliže je tedy naměřený interferogram ovlivněný šumem, dá se očekávat, že vypočítaná obálka interferogramu bude rovněž ovlivněna šumem. V následujícím textu bude proveden výpočet, který ukáže, jak šum interferogramu ovlivní tvar obálky a jaký má vliv na neurčitost měření.

3.2 Hilbertova transformace

Hilbertova transformace funkce f se spočítá ³

$$\hat{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}\{-i\text{sgn}(\nu)\mathcal{F}\{f\}(\nu)\}, \quad (22)$$

přičemž \mathcal{F} and \mathcal{F}^{-1} označuje přímou a inverzní Fourierovu transformaci a $\text{sgn}()$ je funkce signum. Rovnice (22) popisuje, že nejprve se provede Fourierova transformace funkce f . Potom se záporné frekvence násobí imaginární jednotkou i a kladné frekvence záporně vzatou imaginární jednotkou $-i$. Na tento výsledek se aplikuje inverzní Fourierova transformace a to, co obdržíme, je Hilbertova transformace funkce f . Podle rovnice (22) se dá spočítat, že Hilbertovou transformací funkce $\cos x$ je $\sin x$ a naopak Hilbertovou transformací funkce $\sin x$ je $-\cos x$.

Pokud se na funkci f v rovnici (22) díváme jako na signál, Hilbertova transformace mění fázi tohoto signálu o $-\pi/2$. To je zřejmé i z obou uvedených příkladů s funkcemi $\cos x$ a $\sin x$. Výpočet obálky interferogramu se provádí následujícím způsobem. Nejprve se od interferogramu, tedy funkce f odečte jeho střední hodnota. Tím se zaručí, že funkce f_z , která takto vznikne, má střední hodnotu rovnou nule. Pak se provede Hilbertova transformace funkce f_z a hodnota obálky se

³Existují autoři, kteří definují Hilbertovu transformaci s opačným znaménkem, než je uvedeno zde. Na další výpočty popsané v tomto textu nemá volba znaménka u Hilbertovy transformace žádný vliv.

spočítá podle vzorce

$$e(z) = \sqrt{\hat{f}_z^2(z) + f_z^2(z)}. \quad (23)$$

Pokud by se za f dosadila funkce $\cos x$, byla by obálka $e(z)$ rovna konstantní funkci o hodnotě 1.

3.3 Šum obálky

Předpokládejme nyní, že funkce f je ovlivněna šumem n

$$f'(z) = f(z) + n(z). \quad (24)$$

Provedeme-li nyní výpočet obálky podle rovnice (23), obdržíme obálku, která také bude ovlivněna šumem. Šum obálky označíme m a jeho definice plyne z rovnice pro obálku ovlivněnou šumem

$$e'(z) = \sqrt{[\hat{f}'_z(z)]^2 + [f'_z(z)]^2} = e(z) + m(z). \quad (25)$$

Naměřený interferogram ve skutečnosti není funkcí spojitě proměnné, nýbrž množina N diskrétních hodnot. Podélná souřadnice z nabývá hodnot

$$z_j = j\Delta z ; j = 0, \dots, N - 1, \quad (26)$$

kde Δz je vzorkovací krok. Pro každou hodnotu z_j je změřena hodnota intenzity (včetně šumu) f'_j .

Pro šum m obálky platí podle rovnic (22) – (23)

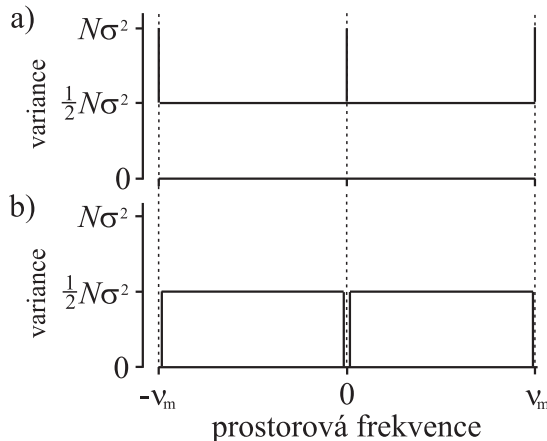
$$m_j \approx \cos[2k_0(j\Delta z - h) + \alpha]n_j + \sin[2k_0(j\Delta z - h) + \alpha]\hat{n}_j. \quad (27)$$

Z rovnice (27) nejsou vlastnosti šumu m obálky přímo zřetelné. To se změní, pokud na obě strany rovnice (27) aplikujeme Fourierovu transformaci⁴. Šum n je v rovnici (27) násoben funkcí \cos a Hilbertova transformace \hat{n} šumu je násobena funkcí \sin . Z toho důvodu se nabízí použít větu o posunutí. Předpokládejme, že n je nekorelovaný šum s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a variancí σ^2 . Pak Fourierova transformace šumu n bude mít také normální rozdělení s

⁴Profesor A. W. Lohmann píše v jednom ze svých článků, že pokud si optik při odvozování neví rady jak dál, měl by na obě strany problémové rovnice aplikovat Fourierovu transformaci.

nulovou střední hodnotou a variancí znázorněnou na obr. 17. To je zřejmé, pokud si uvědomíme, že diskrétní Fourierova transformace se vypočítá podle rovnice

$$\{\mathcal{F}\{f\}\}_l = \sum_{j=0}^{N-1} f_j \cos\left(2\pi \frac{jl}{N}\right) - i \sum_{j=0}^{N-1} f_j \sin\left(2\pi \frac{jl}{N}\right). \quad (28)$$



Obr. 17: Variance Fourierovy transformace šumu n interferogramu: (a) reálná část, (b) imaginární část.

Prostorová frekvence je vynesena v intervalu $-\nu_m, \nu_m$, přičemž ν_m je maximální prostorová frekvence. Ta souvisí s velikostí vzorkovacího kroku

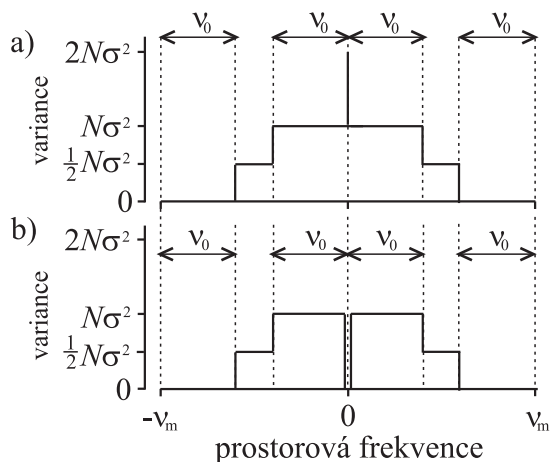
$$\nu_m = \frac{1}{2\Delta z}. \quad (29)$$

Fourierova transformace šumu m obálky spočítaná podle rovnice (27) má rovněž normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a variancí znázorněnou na obr. 18. Na obr. 18 je znázorněna posunovací prostorová frekvence, jako důsledek násobení funkcemi \cos a \sin v rovnici (27). Posunovací frekvence je rovna

$$\nu_0 = \frac{k_0}{\pi} = \frac{2}{\lambda_0}. \quad (30)$$

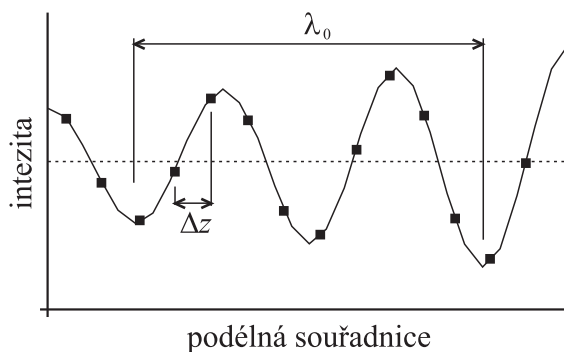
Z rovnic (29) a (30) dostaneme

$$\frac{\nu_0}{\nu_m} = 4 \frac{\Delta z}{\lambda_0}. \quad (31)$$



Obr. 18: Variance Fourierovy transformace šumu m obálky: (a) reálná část, (b) imaginární část.

Poměr posunovací vůči maximální prostorové frekvenci je určen počtem vzorkovacích kroků v intervalu daném střední vlnovou délkou λ_0 , jak je ukázáno na obr. 19. Křivka na obr. 19 znázorňuje část interferogramu, čtverečky představují naměřené hodnoty intenzity.



Obr. 19: Vztah vzorkovacího kroku Δz a střední vlnové délky λ_0 u interferogramu.

Podle obr. 16 a 19 a rovnice (19) je perioda modulace interferogramu rovna $\lambda_0/2$. To je dáno uspořádáním Michelsonova interferometru, kdy

světlo probíhá v ramenu tam a zpět. Rozdíl délky ramen způsobí dvojnásobný rozdíl optických drah.

V příkladu na obr. 18 a 19 je poměr $\nu_0/\nu_m = 2/5$, což znamená, že poměr $\lambda_0/\Delta z = 10$. Na jednu periodu modulace interferogramu tedy připadá 5 vzorků. Srovnáme-li obr. 17 a 18, vidíme, že vlivem výpočtu obálky podle rovnice (25) jsou jednotlivé části Fourierovy transformace šumu posunuty. Část odpovídající kladným prostorovým frekvencím je posunuta o ν_0 směrem k záporným frekvencím a část odpovídající záporným prostorovým frekvencím je posunuta o ν_0 směrem ke kladným frekvencím. Z obr. 18 je také patrné, že variance šumu m obálky má nulovou hodnotu pro prostorové frekvence s vysokou absolutní hodnotou. Naproti tomu, pro prostorové frekvence s nízkou absolutní hodnotou má variance dvojnásobnou hodnotu oproti varianci šumu n interferogramu.

Z Fourierovy transformace šumu obálky, jak je znázorněna na obr. 18, lze pomocí inverzní Fourierovy transformace spočítat šum m obálky. Šum m obálky má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a variancí σ^2 . Docházíme tedy k následujícímu závěru. Jestliže šum n interferogramu má normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a variancí σ^2 , pak šum m obálky vypočítané podle rovnice (25) má také normální rozdělení s nulovou střední hodnotou a variancí σ^2 .

3.4 Nejistota měření

Nejistotu měření je možné spočítat pomocí Cramérový - Raovy nerovnice. Pokud Cramérovu - Raovu nerovnici aplikujeme na signál ve tvaru Gaussovy funkce

$$f_1(z) = b \exp \left[- \left(\frac{z - h}{l_c} \right)^2 \right], \quad (32)$$

obdržíme pro minimální varianci parametru h následující výsledek

$$\text{Var}(h) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} p^2 \Delta z l_c. \quad (33)$$

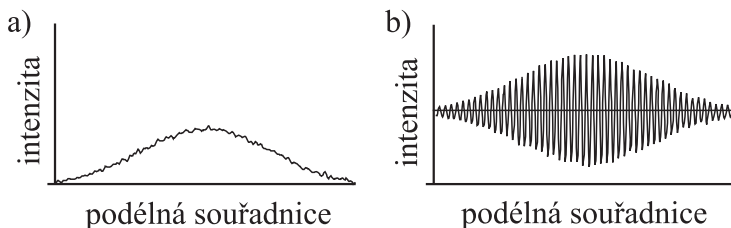
V rovnici (33) označuje $p = \sigma/b$ poměr signálu k šumu. Variance parametru h je druhá mocnina standardní odchylky. A standardní odchylka parametru h je vlastně nejistota měření polohy středu signálu.

Výsledek popsany rovnicí (33) má tvar, jaký bychom zřejmě očekávali. Variance závisí na poměru šumu k signálu, parametru l_c a vzorkovacím kroku ⁵. Znamená to tedy, že nejistota měření, s jakou je střed signálu určen, je tím větší, čím větší je šum, čím větší je vzorkovací krok a čím větší je šířka signálu.

Nyní se zaměříme na otázku, jak je tomu s nejistotou měření u dvou signálů. První signál f_1 je dán rovnicí (32) a druhý signál f_2 má tvar interferogramu

$$f_2(z) = a + b \exp \left[- \left(\frac{z - h}{l_c} \right)^2 \right] \cos[2k_0(z - h) + \alpha]. \quad (34)$$

Předpokládejme, že oba signály jsou ovlivněny šumem se stejnou standardní odchylkou σ . Tvar signálů $f'_1 = f_1 + n$ a $f'_2 = f_2 + n$ ovlivněných šumem, je znázorněn na obr. 20. Na první pohled by se zdálo, že nejistota měření by měla být u obou signálů stejná. Obálka interferogramu f'_2 spočítaná podle postupu uvedeného v části 3.2 bude mít stejný tvar jako signál f'_1 . Podle výsledku uvedeného v části 3.3 budou mít oba signály stejný poměr šumu k signálu. Také ostatní parametry vystupující v rovnici (33) jsou pro oba signály f'_1 a f'_2 stejné.

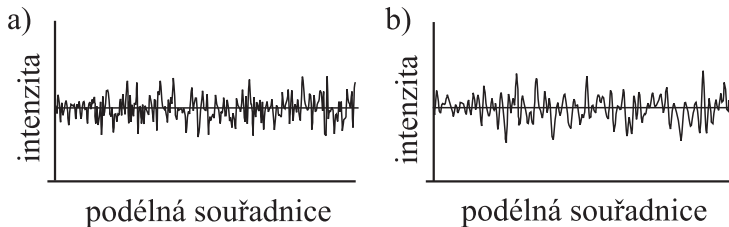


Obr. 20: Signály ovlivněné šumem: (a) signál f'_1 , (b) signál f'_2 .

Přesto tomu tak není, numerické simulace i experiment ukazují, že nejistota měření je v případě signálu f_2 o faktor $\sqrt{2}$ vyšší. Řešení této “záhady” je zřejmé z obr. 21. Na obr. 21 (a) je samotný šum signálu f'_1 a na obr. 21(b) je samotný šum obálky signálu f'_2 . Měřítko na svislé ose je na obr. 21 desetinásobné oproti měřítku na obr. 20. Na první pohled je zřejmé, že šum obálky není nekorelovaný. Výpočet obálky popsany v

⁵V případě interferogramu má l_c význam koherenční délky. V případě signálu bez modulace, jak je popsán rovnicí (32), můžeme l_c považovat za parametr popisující šířku signálu.

části 3.2 způsobí korelaci šumu. Pro výpočet nejistoty měření u obálky signálu nelze rovnici (33) použít, protože ta byla odvozena za předpokladu nekorelovaného šumu. Korelace šumu má na nejistotu měření podobný vliv jako zvětšení velikosti vzorkovacího kroku, zvyšuje nejistotu měření.



Obr. 21: Samotný šum signálů: (a) šum signálu f'_1 , (b) šum obálky signálu f'_2 .

3.5 Korelační funkce šumu obálky

Korelace šumu obálky je zřejmá z obr. 21(b). Aby však mohla být korelace kvantitativně popsána, spočítáme korelační funkci šumu obálky. Protože známe Fourierovu transformaci šumu obálky, je výhodné použít pro výpočet korelační funkce korelační větu. Podle ní je Fourierova transformace korelační funkce rovna druhé mocnině absolutní hodnoty Fourierovy transformace původní funkce. Matematicky zapsáno

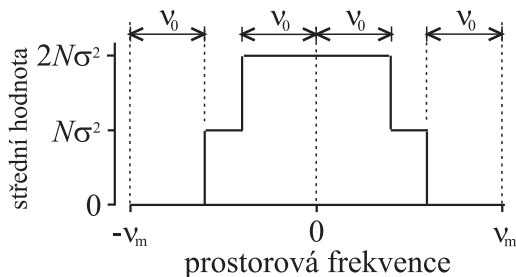
$$\mathcal{F}\{r(z)\} = |\mathcal{F}\{m(z)\}|^2, \quad (35)$$

kde r je korelační funkce šumu m obálky. Protože Fourierova transformace šumu obálky je komplexní veličina, vypočítá se její absolutní hodnota podle rovnice

$$|\mathcal{F}\{m\}|^2 = (\text{Re}\{\mathcal{F}\{m\}\})^2 + (\text{Im}\{\mathcal{F}\{m\}\})^2. \quad (36)$$

Reálná a imaginární část Fourierovy transformace šumu obálky jsou obě náhodné veličiny s normálním rozdělením s nulovou střední hodnotou a variancí znázorněnou na obr. 18. Jejich druhé mocniny jsou náhodné veličiny s rozdělením χ_1^2 se střední hodnotou rovnou varianci umocněných veličin. Součet obou umocněných veličin, provedený

v rovnici (36) je náhodná veličina s rozdělením χ_2^2 se střední hodnotou rovnou součtu variancí obou umocněných veličin. Střední hodnota výrazu $|\mathcal{F}\{m\}|^2$ je zobrazena na obr. 22.



Obr. 22: Střední hodnota výrazu $|\mathcal{F}\{m\}|^2$.

Korelační funkci šumu m obálky dostaneme tak, že na funkci $|\mathcal{F}\{m\}|^2$ aplikujeme inverzní Fourierovu transformaci. Střední hodnota funkce $|\mathcal{F}\{m\}|^2$ je tvořena součtem dvou pravoúhlých funkcí. Je tedy jednoduché spočítat inverzní Fourierovu transformaci, jedná se o součet dvou funkcí sinc s různými argumenty. Abychom dostali skutečnou korelační funkci, musí být výsledná funkce normovaná tak, aby dosahovala hodnoty 1 pro $z = 0$. Korelační funkce je tedy rovna

$$r(z) = \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu_m}\right) \text{sinc} \left[\pi \left(1 - \frac{\nu_0}{\nu_m}\right) \frac{z}{\Delta z} \right] + \frac{\nu_0}{\nu_m} \text{sinc} \left[\pi \frac{\nu_0}{\nu_m} \frac{z}{\Delta z} \right]. \quad (37)$$

Poměr ν_0/ν_m je dán rovnicí (31). Podmínka $r(0) = 1$ je splněna. Pro signál bez korelace (což je vyjádřeno $\nu_0 = 0$) platí, že $r(z) = 1$ pro $z = 0$ a $r(z) = 0$ pro všechny ostatní hodnoty z . Hodnoty prvních osmi koeficientů korelační funkce pro tři hodnoty poměru $\lambda_0/\Delta z$ jsou uvedeny v tab. 4.

Tvar korelační funkce závisí pouze na poměru $\lambda_0/\Delta z$, to znamená na tom, jak jemně nebo hrubě je interferogram vzorkován.

Z korelační funkce je možné sestavit korelační matici. Její prvky jsou rovny

$$\rho_{ij} = r_{|i-j|}. \quad (38)$$

Korelační matice je symetrická, prvky v hlavní diagonále jsou rovny $\rho_{ii} = r_0 = 1$. Matice pro níž platí $\rho_{ii} = 1$ a $\rho_{ij} = r_{i-j}$ se nazývá

Tab. 4: Koeficienty korelační funkce

$\frac{\lambda_0}{\Delta z}$	10	20	40
vzorků na periodu	5	10	20
$\frac{\nu_0}{\nu_m}$	0,4	0,2	0,1
$r_0 = r(0)$	1,000	1,000	1,000
$r_1 = r(1)$	0,605	0,374	0,197
$r_2 = r(2)$	0	0	0
$r_3 = r(3)$	-0,125	0,202	0,172
$r_4 = r(4)$	0	0	0
$r_5 = r(5)$	0	0	0,127
$r_6 = r(6)$	0	0	0
$r_7 = r(7)$	0,053	-0,086	0,074

Toeplitzova matice. Toeplitzova $n \times n$ matice je určena $2(n - 1)$ parametry. Korelační matice popsaná rovnicí (38) je navíc ještě symetrická. K popisu symetrické Toeplitzovy $n \times n$ matice stačí $n - 1$ parametrů.

Minimální variance parametru h pro korelovaný signál [tedy zobecnění rovnice (33)] závisí také na inverzní korelační matici. Tedy na matici inverzní k matici popsané rovnicí (38). Ukazuje se však, že ať je poměr $\lambda_0/\Delta z$ jakýkoli, minimální variance parametru h je dvojnásobná oproti výsledku popsaném maticí (33). Nejistota měření je tedy v případě obálky o faktor $\sqrt{2}$ vyšší než v případě signálu se stejným tvarem.

Použitá literatura

- H.-E. Albrecht, M. Borys, N. Damaschke, C. Tropea, *Laser Doppler and Phase Doppler Measurement Techniques*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.
- M. Born, E. Wolf, *Principles of Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- T. Dresel, G. Häusler, H. Venzke, Three-dimensional sensing of rough surfaces by coherence radar, *Appl. Opt.* 31 (1992) 919–925.
- P. A. Flourney, R. W. McClure, G. Wyntjes, White-Light Interferometric Thickness Gauge, *Appl. Opt.* 11 (1972) 1907–1915.
- G.H. Golub, C.F. van Loan, *Matrix computation*, The John Hopkins University Press, London, 1996.
- G. Häusler, Speckle and Coherence, in: B. D. Guenther (Ed.), *Encyclopedia of Modern Optics*, Elsevier, Academic Press, 2005, pp. 114–123.
- Z. Horák, F. Krupka, *Fyzika*, SNTL, Praha, 1981.
- M. Hrabovský, Z. Bača, P. Horváth, *Koherenční zrnitost v optice*, UP Olomouc, 2001.
- K. G. Larkin, Efficient nonlinear algorithm for envelope detection in white light interferometry, *JOSA A* 13, (1996) 832–843.
- R. Onodera, H. Watanebe, Y. Ishii, Interferometric phase-measurement using a one-dimensional discrete Hilbert transform, *Opt. Rev.* 12 (2005) 29–36.
- P. Pavlíček, O. Hýbl, White-light interferometry on rough surfaces – measurement uncertainty caused by surface roughness, *Appl. Opt.* 47 (2008) 2941–2949.
- K. F. Riley, M. P. Hobson, S. J. Bence, *Mathematical methods for physics and engineering*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2004.

- G. Schröder, *Technická optika*, SNTL, Praha, 1981.
- D.A. Zweig, R.E. Hufnagel, A Hilbert transform algorithm for fringe-pattern analysis, *Proc. SPIE 1333* (1990) 295–302.

RNDr. Pavel Pavlíček, Ph.D.

Vybrané optické problémy, týkající se 3D senzorů

Výkonný redaktor: prof. RNDr. Tomáš Opatrný, Dr.

Odpovědná redaktorka: Vendula Drozdová

Návrh a grafické zpracování obálky: Jiří K. Jurečka

Vydala a vytiskla Univerzita Palackého v Olomouci

Křížkovského 8, 771 47 Olomouc

www.upol.cz/vup

Olomouc 2012

1. vydání

ISBN 978-80-244-3108-6

Neprodejné