

LABORATORNÍ PROTOKOL 7

Fyzikální praktikum 2 – Elektřina a magnetismus

7 | Odpor a rezistivita drátu měřené čtyřbodovou meto- dou

Datum vypracování: 26. 9. 2019
Verze protokolu: 2 – opravný

Počet stran: 8

Vypracoval	Karel Lerak (osobní číslo: R1500a3) <i>studijní program</i> Nanotechnologie <i>ročník</i> 2
Spolupracoval	Pavel Pošel (osobní číslo: R1507a4) <i>studijní program</i> Aplikovaná fyzika <i>ročník</i> 2
Datum měření	23. 9. 2019 (opravný termín)
Skupina	úterní
Laboratoř	LP-4.030, 17. listopadu 12, Olomouc
Kód předmětu	KEF/FP2
Vedoucí měření	Mgr. Michal Dudka
Verze zadání	2019-01, tyčinka A

Abstrakt	Cílem úlohy bylo určení odporu tyčinky z odporového materiálu, prověření ohmického chování tyčinky a následného určení rezistivity materiálu s využitím geometrických rozměrů. Veškeré cíle úlohy byly splněny a měření byla provedena s požadovanou nejistotou.
Poznámka	<i>Na měření jsem spolupracoval s P. Pošelem, ale protože nesouhlasím se způsobem vypracování jeho protokolu, předkládám tento vlastní.</i>

HODNOCENÍ

1. Zadání

Úloha 1. Změřte čtyřbodovou metodou odpor tyčinky s kruhovým průřezem z odporového materiálu, a to s max. relativní nejistotou 1,5 %.

Úloha 2. Ověřte, zda tyčinka vykazuje lineární voltampérovou charakteristiku.

Úloha 3. Určete rezistivitu materiálu tyčinky s max. relativní nejistotou 3 %.

Všechny požadované nejistoty jsou udány pro pravděpodobnost pokrytí 95 %.

2. Teoretický úvod

Použité symboly

Symbol	Veličina	Jednotka
Délka	l	m
Elektrické napětí	U	V
Elektrický odpor	R	Ω
Elektrický proud	I	A
Napětí zdroje	U_0	V
Poloměr	r	m
Průměr	d	m
Průřez	S	m^2
Relativní vlhkost	ϕ	%
Rezistivita	τ	$\Omega \text{ m}$
Teplota	t	$^{\circ}\text{C}$
Výkon elektrického proudu	P	W

Prochází-li tělesem elektrický proud I , vzniká na něm napěťový úbytek U . V případě homogenních jednoduchých látek je často závislost U na I lineární, procházející nulou a lze tak definovat elektrický odpor

$$R = \frac{U}{I}. \quad (1)$$

Odpor získaný podílem příslušných dvojic U_i, I_i by měl být vždy stejný, ale vzhledem k existenci šumu, kontaktního napětí, nejistot měření atd. můžeme dostávat různé hodnoty R_i . Za předpokladu, že nejistoty jednotlivých hodnot R_i budou podobné, můžeme určit střední hodnotu

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{U_i}{I_i}. \quad (2)$$

Budou-li nejistoty výrazně odlišné, použijeme vážený průměr

$$\bar{R} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta R_i} \frac{U_i}{I_i}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\delta R_i}}. \quad (3)$$

Relativní odchylky odporů pak určíme ze vztahu

$$\Delta R_i = \frac{U_i}{I_i} - \bar{R}. \quad (4)$$

Prvek považujeme za lineární, pokud platí, že

$$\frac{\max_i \{|\Delta R_i|\}}{\bar{R}} < 0,01. \quad (5)$$

Při hodnocení odporu ovšem vylučujeme dvojici získanou pro nulový proud, protože zde nelze odpor vypočítat. Prochází-li odporem R proud I , disipuje se na něm výkon

$$P = RI^2. \quad (6)$$

Chceme-li určit odpor tělesa z jeho geometrických a materiálových vlastností, můžeme využít základního vztahu

$$R = \tau \frac{l}{S}, \quad (7)$$

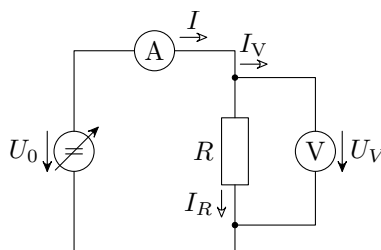
kde τ je rezistivita materiálu, l je délka tělesa a S jeho průřez. V případě tyčinky s kruhovým průřezem je velikost průřezu $S = \pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$, kde d je průměr tyčinky. Úpravou vztahu (7) můžeme získat výsledný vztah pro určení rezistivity

$$\tau = \frac{\pi \bar{R} d^2}{4l}. \quad (8)$$

2.1. Měření odporu

Základní metoda měření odporu tělesa spočívá v připojení dvou kontaktů, kterými prochází proud I a na nichž měříme úbytek napětí U . V případě přesnější čtyřbodové metody, která umožňuje odstranit vliv odporu přívodů, neměříme napětí na kontaktech sloužících k přívodu proudu, ale na vnitřních kontaktech. V takovém případě je nutné ve vztahu (8) místo délky tyčinky l dosadit vzdálenost vnitřních přívodů l' . Pokud ovšem máme určit odpor celé tyčinky, musí vnější i vnitřní kontakty být totožné.

Schéma měřicí metody je na obr. 1. Ze schématu je také patrná chyba měřicí metody, kdy část měřeného proudu I prochází také voltmetrem (proud I_V). Vzhledem k tomu, že předpokládaný odpor tyčinky je v řádech ohmů a vstupní odpor moderních voltmetrů je v řádu M Ω , lze proud I_V při požadované nejistotě měření zanedbat.



Obrázek 1 Schéma pro měření odporu tyčinky.

2.2. Hodnoty použitých konstant

Konstanta	Velikost	Nejistota	Podmínky	Zdroj
Ludolfovo číslo	$\pi = 3,141\ 6$	0,000 1		
Planckova konstanta	$h = 6,626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34}$ J s	přesně		[1]
hustota železa	$\rho_{\text{Fe}} = 7\ 860$ kg/m ³	neznámá	20 °C	[2]

3. Příprava měření

3.1. Předběžná analýza

V rámci přípravného měření byly určeny následující přibližné hodnoty.

Veličina	Velikost
délka tyčinky	$l \doteq 0,1$ m
průměr tyčinky	$d \doteq 1$ mm
odpor tyčinky	$R \doteq 2$ Ω

Tyčinka se jeví, že má mírně deformovaný tvar, proto bude její průměr určen v několika místech a použita střední hodnota.

3.2. Analýza nejistoty

Ze vztahu (1) po aplikaci lineárního zákona šíření nejistot plyne

$$\delta_R = \left| \frac{1}{I} \right| \delta_U + \left| \frac{U}{I^2} \right| \delta_I, \quad (9)$$

a po úpravě na relativní formu

$$\rho_R = \frac{\delta_U}{U} + \frac{\delta_I}{I}. \quad (10)$$

Při rovnoměrném rozložení nejistoty na obě složky vychází požadavek na přesnost měření napětí i proudu 0,75 %. To je splnitelné s přesnějším multimetrem a požadovaná přesnost měření nepřináší komplikace, nebude-li příliš významná složka nejistoty z rozsahu.

Ze vztahu (8) aplikací lineárního zákona šíření nejistot dostaneme

$$\rho_\tau = \frac{\delta_R}{R} + 2\frac{\delta_d}{d} + \frac{\delta_l}{l}. \quad (11)$$

Při rovnoměrném rozložení nejistoty na všechny složky dostáváme následující požadavky:

Nejistota měření	Velikost	Možný přístroj
odporu	$\delta_R \doteq 0,02 \Omega$	velmi přesný ohmmetr
průměru	$\delta_d \doteq 5 \mu\text{m}$	přesný mikrometr
délky	$\delta_l \doteq 1 \text{mm}$	pásové měřítko

Vidíme, že zvláště požadavek na přesnost ohmmetru je extrémní a není možné ho splnit s dostupnými měřicími přístroji (podstatný je především příspěvek z rozsahu). Měl by ovšem být splnitelný s daty z předchozího měření, která mají mít $\delta_R \leq 0,03 \Omega$. Lepší ovšem bude zvýšit přesnost měření délky (posuvné měřítko má $\delta = 0,2 \text{mm}$) a ušetřenou nejistotu použít na měření odporu. Po redistribuci dílčích nejistot pak vychází:

Nejistota měření	Velikost	Možný přístroj
odporu	$\delta_R \doteq 0,03 \Omega$	multimetr HIOKI DT4282 (nepřímá metoda)
průměru	$\delta_d \doteq 5 \mu\text{m}$	přesný mikrometr
délky	$\delta_l \doteq 0,2 \text{mm}$	posuvné měřidlo

3.3. Ovlivňující veličiny

Rozborem problematiky byl zhodnocen vliv následujících veličin:

- **Teplota** – má výrazný vliv na získanou hodnotu odporu i rezistivity, je třeba ji změřit především proto, aby mohla být uvedena při stanovení výsledku. Na nejistotu měření vliv nemá, neboť nebyl dán požadavek na přepočtení hodnot na standardní teplotu.
- **Vlhkost** – dle všeho není tyčinka hygroskopická a její parametry nebudou na vlhkosti záviset, rovněž je čistá a s velkou pravděpodobností se na ní netvoří přídavná vodivá vrstva způsobující svodový povrchový proud. Musí být ovšem přibližně změřena s ohledem na provozní podmínky přístrojů.
- **Tlak** – tyčinka je pevná a neočekáváme deformace vlivem atmosférického tlaku, nebude měřeno.
- **Elektromagnetické pole** – ze zkušenosti neočekáváme vliv okolního elektrického či magnetického pole.
- **Kontaktní a termoelektrické napětí** – předběžné měření nepotvrdilo měřitelný vliv těchto parametrů, má-li celá tyčinka homogenní teplotu. Proto je vhodné minimalizovat kontakt rukou s tyčinkou. Předpoklad bude ověřen tím, že voltampérová charakteristika bude procházet nulou.
- **Proud měření** – může docházet k ohřevu tyčinky procházejícím proudem, omezíme tedy max. proud na 10 mA, při kterém ztrátový výkon na tyčince bude přibližně $P \doteq 0,2 \text{mW}$, což je dostatečně malá hodnota, aby nezpůsobovala ohřev.

3.4. Návrh postupu měření

Postup ověření linearitu a stanovení odporu tyčinky

1. Změříme okolní teplotu a vlhkost a určíme, zda jsou splněny referenční podmínky měřicích přístrojů. V opačném případě musíme buď zohlednit přídavnou nejistotu, nebo měření zcela ukončit.
2. Provedeme kontrolní měření s přístroji pro otestování funkčnosti.
3. Sestavíme měřicí obvod podle schématu na obr. 1. Použijeme nezávislé čtyřbodové připojení voltmetru a ampérmetru tak, aby se všechny kontakty byly na koncích tyčinky. Měřicí přístroje zvolíme s ohledem na požadovanou kvalitu.

- Napětí U_0 postupně nastavuje od nuly s krokem 1 mV a odečítáme napětí U_V a proud I . Když se proud přiblíží hranici 10 mA, měření ukončíme.
- Z naměřených hodnot vypočítáme $R_i, \delta_{R_i}, \bar{R}, \bar{\delta}_R, \Delta R_i = R_i - \bar{R}, \sigma_R$ a kombinovanou a rozšířenou nejistotu.
- Vyhodnotíme linearitu průběhu podle kritéria (5).

Postup měření rezistivity

- Změříme okolní teplotu a vlhkost a určíme, zda jsou splněny referenční podmínky měřicích přístrojů. V opačném případě musíme buď zohlednit přídatnou nejistotu, nebo měření zcela ukončit.
- Provedeme kontrolní měření s přístroji pro otestování funkčnosti.
- Změříme mikrometrem průměry d_i tyčinky v 5 bodech ekvidistantě rozmístěných po délce tyčinky. Vypočteme střední hodnotu \bar{d} , kterou budeme dále dosazovat. Vzhledem k tomu, že opakované měření slouží k odstranění nepravidelnosti tvaru tyčinky a ne ke statistickému vylepšení měření, bude $\delta_{\bar{d}} = \delta_{d_i}$.
- Změříme délku tyčinky l .
- Z naměřených hodnot vypočítáme dle vztahu (8) rezistivitu τ a její nejistoty δ_τ a ρ_τ , přičemž pro R využijeme výsledek z úlohy 1.

4. Realizace měření

4.1. Použité vybavení

Měřicí přístroje

Veličina	Specifikace
napětí U_V	multimetr Fluke 189 (evidenční/sériové číslo 90650620) <i>rozsah</i> DC napětí 500 mV <i>nejistota</i> 0,03 % rdg + 0,02 mV <i>kalibrace do</i> 12. 6. 2020
proud I	multimetr HIOKI DT4282 (evidenční/sériové číslo 150821770) <i>rozsah</i> DC proud 60 mA <i>nejistota</i> 0,05 %rdg + 0,005 mA <i>kalibrace do</i> 27. 8. 2020
průměr d	digitální mikrometr YT-72305 (evidenční/sériové číslo nemá) <i>rozsah</i> 25 mm <i>nejistota</i> 0,001 mm <i>kalibrace do</i> nestanoveno <i>režim</i> relativní měření s vynulováním
délka l	posuvné měřítko (evidenční/sériové číslo nemá) <i>rozsah</i> 150 mm <i>nejistota</i> 0,02 mm <i>kalibrace do</i> nestanoveno
teplota t	pokojevý teploměr (evidenční/sériové číslo nemá) <i>rozsah</i> -10 °C až 45 °C <i>nejistota</i> 0,5 °C (odhadem) <i>kalibrace do</i> nestanoveno
rel. vlhkost RH	vlhkoměr (evidenční/sériové číslo nemá) <i>rozsah</i> 90 % <i>nejistota</i> 3 % (odhadem) <i>kalibrace do</i> nestanoveno

Referenční materiály

Popis	Specifikace
Jednotkový odpor	co já vím

Ostatní přístroje

Přístroj	Specifikace
zdroj napětí U_0	μ Lab Programmable DC Supply (evidenční/sériové číslo μ Lab-DC1)
	rozsah 10 V
	max. proud 22 mA
	rozlišení napětí 0,001 V

Další vybavení propojovací vodiče s banánky, krokosvorky, měřicí stolek

4.2. Naměřená a vyhodnocená data

Pracovní podmínky

Parametr	Velikost	Nejistota
teplota	23,2 °C	0,5 °C
rel. vlhkost	52 %	5 %

Aktuální pracovní podmínky zajišťují práci všech měřidel v referenčních podmínkách.

Úloha 1

Naměřené a počítané hodnoty jsou v tab. 1. Data byla měřena při postupném vzrůstu nastaveného napětí. Vzhledem k tomu, že nejistoty δ_R jsou výrazně rozdílné (a zvláště pro malá napětí U_0 velmi vysoké), bylo k výpočtu \bar{R} použito váženého průměru dle (3). Jednotlivé nejistoty δ_R byly počítány dle vztahu (9) se zohledněním specifikací nejistot jednotlivých přístrojů. Výsledná nejistota typu B byla určena jako střední hodnota δ_{R_i} . Nejistota typu A byla určena jako směrodatná odchylka dle vztahu

$$\sigma_{\bar{R}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (R_i - \bar{R})^2}{n(n-1)}}, \quad (12)$$

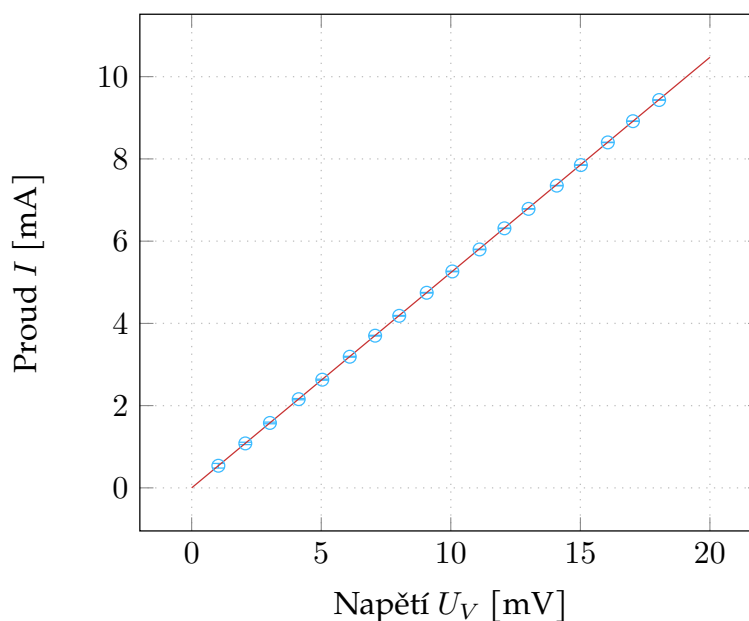
kde $n = 18$. Kombinovaná nejistota byla určena běžným vztahem $u_k = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$ a rozšířená nejistota je určena pro koeficient rozšíření $k = 2$.

Tabulka 1. Měření voltampérové charakteristiky tyčinky. U_0 je napětí zdroje, U_V je napětí na tyčince, I je procházející proud, $R = \frac{U_V}{I}$ je vypočítaný odpor, δ_R je nejistota jednoho měření, ΔR je odchylka odporu od vážené střední hodnoty.

U_0 [V]	U_V [mV]	I [mA]	R [Ω]	δ_R [$10^{-2} \cdot \Omega$]	ΔR [$10^{-3} \cdot \Omega$]
0,000	0,02	0,001	—	—	—
0,001	1,03	0,538	1,914	5,65	+0,9
0,002	2,07	1,081	1,915	2,89	+1,3
0,003	3,02	1,579	1,913	2,03	-1,0
0,004	4,13	2,157	1,915	1,52	+1,1
0,005	5,04	2,631	1,916	1,28	+2,0
0,006	6,10	3,189	1,913	1,08	-0,8
0,007	7,08	3,701	1,913	0,95	-0,6
0,008	8,01	4,184	1,914	0,86	+0,9
0,009	9,07	4,745	1,911	0,78	-2,1
0,010	10,06	5,263	1,911	0,71	-2,1
0,011	11,11	5,798	1,916	0,66	+2,6
0,012	12,07	6,312	1,912	0,62	-1,3
0,013	13,00	6,785	1,916	0,59	+2,4
0,014	14,09	7,350	1,917	0,56	+3,4
0,015	15,02	7,850	1,913	0,53	-0,2
0,016	16,06	8,401	1,912	0,50	-1,9
0,017	17,03	8,917	1,910	0,48	-3,7
0,018	18,04	9,432	1,913	0,47	-0,9

Zpracování dat

průměrná hodnota	$\bar{R} \doteq 1,9135 \Omega$
nejistota A	$\sigma_R \doteq 0,0005 \Omega$
nejistota B	$\bar{\delta}_R \doteq 0,0123 \Omega$
kombinovaná nejistota	$u_k \doteq 0,0123 \Omega$
rozšířená nejistota	$u_r = 2u_k \doteq 0,0246 \Omega$



Obrázek 2. Voltampérová charakteristika tyčinky z odporového materiálu. Naměřené body jsou vyznačeny kroužky, červenou čarou je vykreslena závislost odpovídající \bar{R} . Nejistoty měření jsou tak malé, že většinou splývají v jednu vodorovnou čárku. Data pochází z tab. 1.

Výsledkem měření a zpracování je hodnota odporu tyčinky

$$R \doteq (1,91 \pm 0,03) \Omega,$$

s pravděpodobností pokrytí 95 %. Relativní nejistota $\rho_R = 1,5\%$ vychází na hranici požadavků. Důvodem je evidentně dominance nejistoty typu B, způsobená velkou složkou z rozsahu. Nicméně měření je ve skutečnosti nepatrně lepší, protože při zaokrouhlení výsledné nejistoty na dvě platná místa by vycházela relativní nejistota 1,3 %.

Úloha 2

Z voltampérové charakteristiky (obr. 2) je patrné, že závislost proudu na napětí opravdu může být lineární, přičemž prochází počátkem. Tím je ověřen původní předpoklad, že se neprojevují termoelektrická a kontaktní napětí. Rovněž je vidět, že se s rostoucím napětím U_V postupně snižuje nejistota měření a bylo by tedy lepší měřit s většími proudy. To by však zvýšilo vnitřní ohřev a také bychom se přiblížili k proudovému limitu napájecího zdroje.

Posouzení linearit podle kritéria (5) vede k závěrům, že

$$\max_i \{|\Delta R_i|\} \doteq 0,0037 \Omega, \quad (13)$$

$$\frac{\max_i \{|\Delta R_i|\}}{\bar{R}} \doteq 0,002 = 0,2\%. \quad (14)$$

Podmínky kritéria tedy jsou splněny a závislost proudu na napětí lze prohlásit za lineární, procházející počátkem.

Pracovní podmínky

Parametr	Velikost	Nejistota
teplota	23,4 °C	0,5 °C
rel. vlhkost	52 %	5 %

Úloha 3

Měření průměru tyčinky je uvedeno v tab. 2. Z dat lze vypočítat aritmetický průměr $\bar{d} \doteq 999 \mu\text{m}$ s nejistotou rovnou původní, tj. $\delta_{\bar{d}} = 1 \mu\text{m}$. Pomocí posuvného měřítka byla změřena délka tyčinky $l \doteq 10,15 \text{ mm}$ s nejistotou $\delta_l = 0,02 \text{ mm}$. Po dosazení do vztahu (8) dostáváme $\tau \doteq 1,475 \cdot 10^{-4} \Omega \text{ m}$. Výpočet nejistoty s využitím vztahu (11) vede k $\delta_{\tau} \doteq 0,02 \cdot 10^{-4} \Omega \text{ m}$.

Výsledkem měření a zpracování je hodnota rezistivity materiálu tyčinky

$$\tau \doteq (1,48 \pm 0,02) \cdot 10^{-4} \Omega \text{ m}.$$

Tabulka 2 Měření průměru tyčinky. Nejistota δ_{d_i} je $1 \mu\text{m}$.

i [-]	d_i [μm]
1	998
2	1 002
3	997
4	995
5	1 003

5. Závěr

- Naměřený odpor tyčinky je $R \doteq (1,91 \pm 0,03) \Omega$ při teplotě 23°C . Relativní nejistota měření je $\rho_R \doteq 1,5\%$ a výsledek splňuje požadavky zadání. Získaná hodnota odpovídá předpokladům s ohledem na skutečnosti známé o tyčince a její velikost potvrzuje vhodnost použití čtyřbodové metody, protože dvoubodová metoda by měřila i odpory přívodů a přechodové odpory, které mohou dosáhnout i 1Ω .
- Tyčinka vykazuje lineární závislost mezi proudem a napětím. Data rovněž potvrzují průchod počátkem a tedy nevykazují ofset způsobený třeba kontaktním napětím. Pro přesné posouzení linearity by bylo potřeba provést měření i pro záporná napětí a vyšetřit případnou hysterezi.
- Naměřená rezistivita materiálu tyčinky je $\tau = (1,48 \pm 0,02) \cdot 10^{-4} \Omega \text{ m}$ při teplotě 23°C . Dosažená relativní nejistota měření je $\rho_\tau \doteq 1,4\%$ a splňuje požadavky zadání. Lepší relativní nejistoty bylo dosaženo především díky přesnějšímu měření geometrických rozměrů. Získaná hodnota rezistivity odpovídá špatně vodivému materiálu (dobře vodivé materiály mají hodnoty menší než $10^{-7} \Omega \text{ m}$) a je smysluplná.

Všechny rozšířené nejistoty jsou udány pro pravděpodobnost pokrytí 95 %.

Použité zdroje

- [1] CODATA Value: Planck constant, https://physics.nist.gov/cgi-bin/cuu/Value?h|search_for=planck [cit. 26. 9. 2019]
- [2] Železo, <https://cs.wikipedia.org/wiki/%C5%BDelezo> [cit. 26. 9. 2019]